SEQÜÊNCIAS: EXERCÍCIOS

RAUL H.C.LOPES

1. Introdução

Estas notas contêm exercícios sobre propriedades de seqüências. São requisitos para o entendimento dos mesmos:

- Lógica de primeira ordem
  Todas as provas apresentadas usam lógica de primeira ordem e assumem os axiomas da iagualdade: reflexividade, simetria e transitividade. Além disso, elas são apresentadas no estilo de *equational reasoning*, como em [2]. As seguintes constantes lógicas são usadas com a definição usual:
  - $\wedge$, conjunção;
  - $\vee$, disjunção;
  - $\Rightarrow$, implicação;
  - $\Leftarrow$, *only if*;
  - $\forall$, quantificador universal;
  - $\exists$, quantificador existencial;
  - $=$, igualde, que, usado sobre expressões lógicas, substitui equivalência;
  - $\vdash$, relação de dedutibilidade:
    $$\Gamma \vdash \alpha$$
    de Γ é possível deduzir α.
  - $\triangleq$, abreviação:
    $$X \triangleq Y$$
    X é um nome para Y: onde encontar X, coloque Y.

  Vale ressaltar que a igualdade é relação válida para qualquer par de objetos do mesmo tipo.
- A notação de pontos de Curry, ver página 34 de [1] é utilizada para reduzir o uso de parênteses. Resumidamente, ela estabelece:
  - São marcadores de pontuação (de agora em diante *markers*) ponto (.), dois pontos, e *bullet* ($\bullet$), tendo força crescente nessa ordem.

- um *marker* à esquerda de um operador (relacional ou funcional, unário ou binário) fecha uma expressão (fecha um parênteses), cujo escopo se estende para a esquerda;
- um *marker* à direita de um operador (relacional ou funcional, unário ou binário) inicia uma expressão (abre um parênteses), cujo escopo se estende para a direita;
- o escopo de uma expressão obedece às seguintes leis:
  (1) O escopo de uma expressão determinado por um *marker* respeita os tipos implícitos dos operadores que nela ocorrem.
  (2) um *marker* colado a $\vdash$ ou $\triangleq$ tem prioridade sobre qualquer outro *marker*.
  (3) Um *marker* colado a uma constante lógica tem prioridade sobre qualquer outro *marker* colado a operadores (relacionais ou funcionias) não lógicos.
  (4) As constantes lógicas têm prioridade sobre outros operadoes.
  (5) Um *marker* tem prioridade sobre outro *marker*de mesma força situado á direita, desde que sejam respeitadas as regras anteriores.

2. Seqüências

Uma seqüência de elementos de um tipo A é uma seqüência vazia (denotada por $\perp$) ou resultado de adicionar um elemento de A a uma seqüência de elementos de A. Os axiomas a seguir definem seqüências de elementos de A, denotada $seq.A$:

- $\perp \in seq.A$
- $(a \triangleleft x) \in seq.A$ se $x \in seq.A \wedge a \in A$
- fecho universal.

Assumindo que $x, y \in seq.A$ e que $a, b \in A$, os seguintes axiomas tratam a igualdade sobre seqüências.

- $\perp \neq (a \triangleleft x)$
- $(a \triangleleft x) = (b \triangleleft y)$.=. $a = b \wedge x = y$

O princípio da indução sobre seqüências estabelece que se P é propriedade sobre seqüências:

$$(\forall x : x \in seq.A : P.x) =$$
$$(P(\perp) \wedge (\forall x : x \in seq.A : \forall a : a \in A : P(x) \Rightarrow P(a \triangleleft x)))$$

As equações a seguir definem o operador *snoc* (denotado $\triangleright$, em oposição, logicamente ao operador *cons*, $\triangleleft$).

- $\perp \triangleright a \;.=.\; a \triangleleft \perp$
- $(a \triangleleft x) \triangleright b \;.=.\; a \triangleleft (x \triangleright b)$

As equações a seguir definem um operador *cat* (denotado $\frown$) para concatenar duas seqüências.

- $\perp \frown y = y$
- $(a \triangleleft x) \frown y = .a \triangleleft (x \frown y)$

Pertinência em uma seqüência é definida a seguir.

- $a \notin \perp$
- $a \in (b \triangleleft x) =.\; a = b \vee a \in x$

A definição de inserção ordenada em uma seqüência segue. Assume-se que o tipo A é totalmente ordenado com os operadores $<$ e $\leq$ tendo o seu significado usual.

- $a \rightsquigarrow \perp = (a \triangleleft \perp)$
- $a \leq b \Rightarrow (a \rightsquigarrow (b \triangleleft x) =.\; a \triangleleft (b \triangleleft x))$
- $a > b \Rightarrow (a \rightsquigarrow (b \triangleleft x) =.\; b \triangleleft (a \rightsquigarrow x))$

Exercício 1. *Prove que*

$$b < a \wedge (\forall c : c \in x : b \leq c) \;.\Rightarrow.\; \forall d : d \in a \rightsquigarrow x : b \leq d$$

Prova.

$$\begin{aligned}
& \forall d : d \in a \rightsquigarrow x : b \leq d \\
\Leftarrow & \langle \textit{por lema 5} \rangle \\
& \forall d : d = a \vee d \in x : b \leq d \\
= & \langle \textit{range de } \forall \rangle \\
& b \leq a \wedge \forall d : d \in x : b \leq d \\
\Leftarrow & \langle \textit{aritmética} \rangle \\
& b < a \wedge \forall d : d \in : b \leq d
\end{aligned}$$

$\square$

Exercício 2. *Prove que*

$$(b \triangleleft x) \nearrow \Rightarrow x \nearrow$$

Prova.

$\langle$**Por casos de** $x\rangle$:

$\langle$**Caso** $[x := \perp]\rangle$

$$
\begin{aligned}
& \perp . \nearrow \\
= & \langle \textit{axioma de } \nearrow \rangle \\
& true
\end{aligned}
$$

$\langle$**Caso** $[x := c \triangleleft z]\rangle$

$$
\begin{aligned}
& (c \triangleleft z) \nearrow \\
\Leftarrow & \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& b \leq c \wedge (c \triangleleft z) \nearrow \\
= & \langle \textit{terceiro axioma de } \nearrow \rangle \\
& (b \triangleleft . \, c \triangleleft z) \nearrow
\end{aligned}
$$

□

Exercício 3. *Prove que*

$$(\forall a : a \in x : b \leq a) \wedge x. \nearrow \ .\Rightarrow. \ b \triangleleft x. \nearrow$$

Prova.

$\langle$**Por casos de** $x\rangle$:

$b \triangleleft x. \nearrow$
$\Leftarrow\langle$**Eliminação de** $\wedge\rangle$
$b \triangleleft x. \nearrow \wedge\ x = \perp$
$=$
$b \triangleleft \perp. \nearrow \wedge\ x = \perp$
$=\langle$*segundo axioma de* $\nearrow\rangle$
$true \wedge x = \perp$
$=\langle$*identidade de*$\wedge\rangle$
$x = \perp$
$= \langle$**Caso** $[x := \perp]\rangle$
$true$
$\langle$**caso**$[x := c \triangleleft z]\rangle$
$b \triangleleft x. \nearrow$
$\Leftarrow\langle$**Eliminação de** $\wedge\rangle$
$b \triangleleft x. \nearrow \wedge\ x = .c \triangleleft z$
$=$
$(b \triangleleft. c \triangleleft z) \nearrow \wedge\ x =. c \triangleleft z$
$=\langle$*terceiro axioma de* $\nearrow\rangle$
$b \leq c \wedge c \triangleleft z. \nearrow \wedge\ x =. c \triangleleft z$
$\Leftarrow\langle$**Eliminação de** $\wedge\rangle$
$b \leq c \wedge (\forall a : a \in z : b \leq a) \wedge c \triangleleft z. \nearrow \wedge\ x =. c \triangleleft z$
$=$
$(\forall a : a = c \vee a \in z : b \leq a) \wedge c \triangleleft z. \nearrow \wedge\ x =. c \triangleleft z$
$=\langle$*segundo axioma de* $\in\rangle$
$(\forall a : a \in. c \triangleleft z : b \leq a) \wedge c \triangleleft z. \nearrow \wedge\ x =. c \triangleleft z$
$=$
$(\forall a : a \in. x : b \leq a) \wedge x. \nearrow \wedge\ x =. c \triangleleft z$
$=\langle$*premissa do teorema e caso* $[x := c \triangleleft z]\rangle$
$true$

$\square$

Exercício 4. *Prove que*

$$\forall b : b \in A : (b \triangleleft x) \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in x : b \leq a$$

Prova.

Por inducção: trivial quando $x = \perp$.
Assuma $R.x \triangleq \forall b : b \in A : (b \triangleleft x) \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in x : b \leq a$.
Prove $R.\forall\triangleleft : b : b \in Acx \triangleq (b \triangleleft (c \triangleleft x)) \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in (c \triangleleft x) : b \leq a$.
Assuma $b \triangleleft (c \triangleleft x) \nearrow$.

$$\begin{aligned}
& \forall a : a \in .\ c \triangleleft x : d \leq a \\
\Leftarrow & \langle \textit{por } R.x \rangle \\
& (d \triangleleft x) \nearrow \\
\Leftarrow & \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& d \leq c \wedge (d \triangleleft x) \nearrow \\
= & \langle \textit{terceiro axioma de } \nearrow \rangle \\
& d \triangleleft (c \triangleleft x) \nearrow \\
= & \langle \textit{premissa do teorema} \rangle \\
& \textit{true}
\end{aligned}$$

□

Exercício 5. *Prove que*

$$(a \in (b \rightsquigarrow x)) \Rightarrow a = b \vee a \in x$$

Prova.

Por indução.
Trivial quando $x = \perp$.
Assuma $R.x \triangleq (a \in (b \rightsquigarrow x)) \Rightarrow a = b \vee a \in x$
Prove $R.c \triangleleft x \triangleq (a \in (b \rightsquigarrow (c \triangleleft x))) \Rightarrow a = b \vee a \in (c \triangleleft x)$
Prova por casos, considerando $b \leq c$ *e* $c < b$.

Caso $b \leq c$.

$$
\begin{aligned}
& a = b \vee a \in .\ c \triangleleft x \\
=& \langle \textit{segundo axioma de } \in \rangle \\
& a \in .\ b \triangleleft (c \triangleleft x) \\
\Leftarrow& \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& b \leq c \wedge a \in .\ b \triangleleft (c \triangleleft x) \\
\Leftarrow& \langle \textit{segundo axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
& b \leq c \wedge a \in (b \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \\
=& \langle \textit{premissa do teorema e caso } [b \leq c] \rangle \\
& true
\end{aligned}
$$

Caso $c < b$.

$$
\begin{aligned}
& a = b \vee a \in .\ c \triangleleft x \\
=& \langle \textit{segundo axioma de } \in \rangle \\
& a = b \vee a = c \vee a \in x \\
=& \langle \textit{comutatividade de } \vee \rangle \\
& a = c \vee (a = b \vee a \in x) \\
\Leftarrow& \langle R.x \rangle \\
& a = c \vee a \in (b \rightsquigarrow x) \\
=& \langle \textit{segundo axioma de } \in \rangle \\
& a \in c \triangleleft (b \rightsquigarrow x) \\
\Leftarrow& \textbf{Eliminação de } \wedge \\
& c < b \wedge a \in c \triangleleft (b \rightsquigarrow x) \\
=& \langle \textit{segundo axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
& c < b \wedge a \in (b \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \\
=& \langle \textit{premissa e caso } c < b \rangle \\
& true
\end{aligned}
$$

□

Exercício 6. *Prove que*

$$x.\ \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in A : (a \rightsquigarrow x) \nearrow$$

Prova.

Por indução.

Caso base, $x = \perp$, étrivial.

Assuma $R.x \stackrel{\triangle}{=} x. \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in A : (a \rightsquigarrow x) \nearrow$
Prove $R.c \triangleleft x \stackrel{\triangle}{=} (c \triangleleft x) \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in A : (a \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \nearrow$
Assuma $(c \triangleleft x) \nearrow$
Prove $(a \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \nearrow$
Prova por casos: $a \leq c$ *e* $a > c$.
Caso $a \leq c$ *é trivial.*
Caso $a > c$.

$$
\begin{aligned}
& (a \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \nearrow \\
\Leftarrow & \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& c < a \wedge (a \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \nearrow \\
= & \langle \textit{terceiro axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
& c < a \wedge (c \triangleleft (a \rightsquigarrow x)) \nearrow \\
\Leftarrow & \langle \textit{por lema 1} \rangle \\
& b < a \wedge ((\forall c : c \in a \rightsquigarrow x : b \leq c) \wedge (a \rightsquigarrow x) \nearrow) \\
\Leftarrow & \langle \textit{por lema 2 e por } R.x \rangle \\
& b < a \wedge (\forall c : c \in a \rightsquigarrow x : b \leq c) \wedge b \triangleleft x. \nearrow \\
= & \langle \textit{por lema 5} \rangle \\
& b < a \wedge (\forall c : c \in x : b \leq c \wedge b \triangleleft x. \nearrow \\
\Leftarrow & \langle \textit{por lema 4} \rangle \\
& b < a \wedge b \triangleleft x. \nearrow \\
= & \langle \textit{premissas} \rangle \\
& \textit{true}
\end{aligned}
$$

□

¡++¿

Referências

[1] Haskell B. Curry, *Foundations of mathematical logic*, Dover Publications, Inc., 1977.
[2] David Gries and Fred B.Schneider, *A logical approach to discrete mathematics*, Springer-Verlag, 1993.