

INDUÇÃO MATEMÁTICA

RAUL H.C. LOPES

1. INDUÇÃO MATEMÁTICA

1.1. Provas por indução.

Questão 1. Prove por indução:

- (1) $(\sum i : 1 \leq i \leq n :)i = n(n+1)/2$
- (2) $(\sum i : 0 \leq i < n : 2^i) = 2^n - 1$
- (3) $(\sum i : 0 \leq i < n : 3^i) = (3^n - 1)/2$
- (4) $(\sum i : 1 \leq i \leq n : i^2) = n(n+1)(2n+1)/6$
- (5) $(\sum i : 0 \leq i < n : i \cdot 2^i) = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$
- (6) $(\sum i : 0 \leq i \leq n : (2i+1)^2) = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$
- (7) $(\sum i : 0 \leq i \leq n : i(i+1)(i+2)) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$
- (8) $\forall n, a : n \geq 1 \wedge a \neq 1 : (\sum i : 0 \leq i < n : a^i) = (1 - a^{n+1})/(1 - a)$
- (9) $\forall n : n \geq 1 : (\sum i : 1 \leq i \leq n : 1/(i \cdot (i+1))) = n/(n+1)$
- (10) $\forall n : n \geq 3 : n+1 < 2^n$
- (11) $\forall n : n \geq 4 : n^2 \leq 2^n$
- (12) $\forall n : n \geq 7 : 3^n < n!$

Questão 2. Formule os princípios de indução forte e indução fraca e prove sua equivalência.

Questão 3. Apresente o conceito de admissibilidade de definições indutivas.

1.2. Definições indutivas.

Questão 4. Defina um conjunto indutivo para representar números inteiros não negativos. Defina operações básicas sobre os números: soma, subtração, multiplicação, divisão, etc.

1.3. Tipos abstratos de dados.

Questão 5. Crie em Haskell um tipo de dados para representar seu indutivo da questão 4.

Questão 6. Crie em Haskell, ao menos, as seguintes funções sobre o tipo da questão 5, defina e prove condições de correção para as mesmas:

- (1) Funções recursiva e iterativa para cálculo de:

- *soma de dois objetos;*
 - *diferença de dois objetos;*
 - *produto de dois objetos;*
 - *divisão de dois objetos;*
 - *resto da divisão inteira de dois objetos.*
- (2) *Funções implementar os relações lógicas, apresentando condições de correção:*
- (a) *igualdade;*
 - (b) *desigualdade;*
 - (c) *menor que;*
 - (d) *maior que;*

Questão 7. *Repita o exercício anterior em um provador de teoremas (e.g. Isabelle, PVS) e formalizando as provas correspondentes.*