CALL FOR THE DEAD

RAUL H.C. LOPES

1. O teste

Exercício 1. *Defina um operador binário* $(\#)$ *tal que*

$$\# \, a \, x = n$$

quando n *é o número de ocorrências de* a *em* x*. Responda: O que significa a expressão*

$$\# \, a = \# \, a \, . \, insSort?$$

Prove.

Solução.

Um operador binário para contar ocorrencias de a *em* x*.*

$$\begin{aligned}
&\# \, a \perp = 0 \\
&a = b \Rightarrow (\# \, a \, (b \triangleleft x) = 1 + (\# \, a \, x)) \\
&a \neq b \Rightarrow (\# \, a \, (b \triangleleft x) = \# \, a \, x)
\end{aligned}$$

A propriedade

$$\# \, a = \# \, a \, . \, insSort$$

usa composição de funções para expressar que

$$(\wedge a, x : a \in A \wedge x \in seq.A : \# \, a \, x = \# \, a \, (insSort \, x))$$

Prova.

Prove por indução que $(\wedge x : x \in seq.A : P \, x)$*, onde*

$$P = \lambda x \rightarrow (\wedge a : a \in A : \# \, a \, x = \# \, a \, (insSort \, x)).$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{\textit{Prova de:}} \; P \perp \\
&= \langle \textit{trivial} \rangle \\
&\quad True \\
&\textbf{\textit{Assuma}} \; P \, x_0 \\
&\textbf{\textit{Prova de:}} \; P(b_0 \triangleleft x_0) \\
&\textbf{\textit{Caso}} \; a_0 = b_0 \\
&\quad \# \, a_0 \, (a_0 \triangleleft x_0) \\
&= \langle \quad \rangle \\
&\quad 1 + (\# \, a_0 \, x_0) \\
&= \langle \quad \rangle \\
&\quad 1 + (\# \, a_0 \, (insSort \, x_0)) \\
&= \langle \textit{lema} \rangle \\
&\quad \# \, a_0 \, (insSort \, x_0 \mathrel{<\!\!+} b_0) \\
&= \langle \quad \rangle \\
&\quad \# \, a_0 \, (insSort(b_0 \triangleleft x_0) \, \textbf{\textit{Caso}} \; a_0 \neq b_0 \\
&= \langle \textit{Your turn!} \rangle
\end{aligned}$$

□

Exercício 2. *Defina um operador* $(x \nearrow)$ *que estabelece que uma seqüência* x *está ordenada e prove que* $(insSort \, x) \nearrow$*.*

Solução.

Operador $(x\nearrow)$ foi definido em sala. Prova de $(insSort\,x)\nearrow$ segue por indução.

Prova.

$$
\begin{aligned}
\textbf{\textit{Prova de:}}\ & P\,(b_0 \triangleleft x_0)\\
& (insSort(b_0 \triangleleft x_0))\nearrow\\
=& \langle \quad \rangle\\
& ((insSort\ x_0) \lessdot\!\!+ a_0)\nearrow\\
\Leftarrow& \langle \quad \rangle\\
& (insSort\ x_0)\nearrow\\
=& \langle P\,x_0 \rangle\\
& True
\end{aligned}
$$

□

Exercício 3. *Argumente contra ou favor de: insSort **é uma função correta para ordenação de seqüências.***

Solução.

Uma função para ordenação de seqüências deve:

- *Preservar cada elemento da seqüência original, o que foi provado no Exercício 1.*
- *Produzir uma seqüência ordenada, o que foi provado no Exercício 2.*

Logo, a função proposta está correta.

□

Exercício 4. *Considere os seguintes axiomas:*

(1) $surge\ a\ \bot = \bot$

(2) $a = b \Rightarrow (surge\ a\ (b \triangleleft x) = x)$

(3) $a \neq b \Rightarrow (surge\ a\ (b \triangleleft x) = b \triangleleft (surge\ a\ x))$

O que faz surge? Prove.

Solução.

A função surge aplicada a a e x "elimina" a primeira ocorrência de a em x. Note que provar que surge elimina a primeira ocorrência de a demanda expressar como sendo formado de uma segmento inicial y que não contém a seguido de um segumento que inicia com a. Em resumo, o objeto consiste em provar

$$(\wedge x : x \in seq.A : \exists y, a, z : a \in A \wedge y, z \in seq.A \wedge a \notin y : x = y^\frown(a \triangleleft z) \Rightarrow (surge\ a\ x = y^\frown z))$$

- *Apresente a propriedade P para provar $(\wedge x :\ : P\,x)$.*
- *Prove $P\,\bot$.*
- *Assuma $P\,x_0$ para provar $P(b_0 \triangleleft x_0)$.*

  Note que $P\,x_0$ permite assumir que

  $$\exists y, a, z : a \in A \wedge y, z \in seq.A \wedge a \notin y : x_0 = y^\frown(a \triangleleft z) \Rightarrow (surge\ a\ x_0 = y^\frown z)$$

  Isso significa assumir que para a_0, y_0, z_0 arbitrários e tais que $a_0 \notin y_0$:

  $$x_0 = y^\frown(a \triangleleft z) \Rightarrow (surge\ a\ x_0 = y^\frown z)$$

  Por outro lado, provar que $P(b_0 \triangleleft x_0)$ demanda encontrar substitutos para as variáveis y, a, z que estão existencialmente quantificadas. Assumindo que os parâmetros y_0, a_0, x_0, introduzidos em $P\,x_0$, são tais substitutos, cabe provar que

  $$a_0 \notin y_0 \wedge x_0 = (y_0{}^\frown(a_0 \triangleleft z_0)) \Rightarrow (surge\ a_0\ x_0 = ((b_0 \triangleleft y_0)^\frown z_0))$$

Prova de: $P(b_0 \triangleleft x_0)$

Caso $a_0 \neq b_0$

$$
\begin{aligned}
& surge\ a_0\ (b_0 \triangleleft x_0) \\
=& \langle \qquad \rangle \\
& (b_0 \triangleleft (surge\ a_0\ x_0) \\
=& \langle \qquad \rangle \\
& (b_0 \triangleleft (surge\ a_0\ (y_0 \hat{}\, (a_0 \triangleleft z_0))) \\
=& \langle \qquad \rangle \\
& b_0 \triangleleft (y_0 \hat{}\, z_0) \\
=& \langle \qquad \rangle \\
& (b_0 \triangleleft y_0) \hat{}\, z_0
\end{aligned}
$$