SEQÜÊNCIAS

RAUL H.C. LOPES

1. Seqüências: axiomas

Definição 1. *Seqüências são elementos de uma classe indutiva a que pertencem a seqüência vazias e as seqüências obtidas pela adição de algum objeto a uma seqüência já existente. Os axiomas fundamentais para que estabelecem o tipo seqüência de elementos do tipo A, denotada por seq.A, são:*

(1)
Seqüência vazia: $\perp \in seq.A$

(2)
Cons: $(\wedge a \in A, x \in seq.A : \, : a \triangleleft x \in seq.A)$

(3)
Cons e vazio: $(\wedge a \in A, x \in seq.A : \, : \perp \neq a \triangleleft x)$

(4)
Igualdade: $(\wedge a, b \in A, x, y \in seq.A : \, : (a \triangleleft x = b \triangleleft y) = (a = b \wedge x = y))$

Um princípio de indução para prova de propriedades sobre seqüências pode ser obtido diretamente da indução sobre *well founded sets* a partir da seguinte relação de precedência.

Definição 2. *A seguinte relação de precedência estabelece seq.A como* Well-founded set*.*

$$(\wedge a, x : a \in A \wedge x \in seq.A : \perp \prec a \triangleleft x)$$
$$(\wedge a \in A, x \in seq.A : \, : x \prec a \triangleleft x)$$
$$(\wedge x, y, z \in seq.A : x \prec y \wedge y \prec z : x \prec z)$$

Definição 3.

$$(\wedge x : x \in seq.A : P\,x)$$
$$=$$
$$(\wedge x : x \in seq.A : (\wedge y \in seq.A : y \prec x : P\,y) \Rightarrow P\,x)$$

Alternativamente uma forma fraca desse princípio pode ser obtida, observando-se que $\perp$ é o único elemento minimal da classe de seqüências e que $\triangleleft$ é seu único construtor.

Definição 4.

$$(\wedge x : x \in seq.A : P\,x)$$
$$=$$
$$P \perp \wedge (\wedge a \in A, x \in seq.A : P\,x : P(a \triangleleft x))$$

Exercício 1. *Prove que o princípio apresentado na Definição 3 é equivalente ao princípio apresentado na Definição 4.*

Exercício 2. *Prove que* $(\wedge x \in seq.A : \ : x = \perp \vee \exists a \in A, y \in seq.A : \ : x = b \triangleleft y)$

Exercício 3. *Construa uma definição indutiva para um operador* $x \triangleright a$ *que adiciona* a *ao final de uma seqüência* x. *Sugestão: define* $\triangleright$ *em termos de* $\triangleleft$, *usando dois axiomas, que considerem respetivamente os casos em* x *é ou não é vazia.*

Exercício 4. *Construa uma definição indutiva para um operador de pertinência sobre seqüências tal que* $b \in x$ *se e somente se* b *ocorre na seqüência* x.

Exercício 5. *Prove que seu operador* $\triangleright$ *tem as seguintes propriedades:*

$$x \triangleright c \neq \perp$$
$$(x \triangleright b = y \triangleright c) = (x = y \wedge b = c)$$
$$b \in x \triangleright c = b \in x \vee b = c$$

Exercício 6. *Construa uma defição indutiva para um operador* $\char94$, *que concatena duas seqüências dadas:*

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft \perp \hat{}\, 3 \triangleleft 4 \triangleleft \perp = 1 \triangleleft 2 \triangleleft 3 \triangleleft 4 \triangleleft \perp.$$

Defina seu operador $\hat{}$ *em termos do operador* $\triangleleft$.

Exercício 7. *Prove que* $x \hat{}\perp = x$

Exercício 8. *Prove que* $(x \hat{}\, y) \triangleright c = x \hat{}\,(y \triangleright c)$.

Exercício 9. *Prove que* $(x \hat{}\, y) \hat{}\, z = x \hat{}\,(y \hat{}\, z)$.

Exercício 10. *Prove que* $(x \hat{}\, y = \perp) = (x = \perp \wedge y = \perp)$

Exercício 11. *A classe indutiva de seqüências, introduzida na Definição 1, tem um equivalente em Haskell que são as listas. Defina em Haskell um tipo indutivo (Seq a) para representar seqüências de elementos do tipo a. Implemente em Haskell todos os operadores destas notas usando o tipo primitivo de listas e seu tipo Seq.*

2. Ordenação de seqüências: insertion sort

Considere os seguintes axiomas para definição de seqüência ordenada x, denotado por $x\nearrow$, com respeito a uma relação de precedência ($\prec$).

$$\perp\nearrow \tag{5}$$

$$(a \triangleleft \perp)\nearrow \tag{6}$$

$$(a \triangleleft b \triangleleft x)\nearrow = a \prec b \wedge (b \triangleleft x)\nearrow \tag{7}$$

Considere ainda a seguinte definição indutiva de precedencia de um item em relação a uma seqüência.

$$b \prec \perp \tag{8}$$

$$a \prec b \triangleleft x = a \prec b \wedge a \prec x \tag{9}$$

Exercício 12. *Prove que*

$$(a \triangleleft x)\nearrow = a \prec x \wedge x\nearrow$$

Prova.

$$P = \lambda x \rightarrow (\wedge a : a \in A : (a \triangleleft x)\nearrow = a \prec x \wedge x\nearrow)$$

A prova de $P\perp$ é trivial.
A prova de $P(b_0 \triangleleft x_0)[a := a_0])$ segue.

$$\begin{aligned}
&(a_0 \triangleleft b_0 \triangleleft x_0)\nearrow\\
=&\langle \textit{Axioma 7}\rangle\\
&a_0 \prec b_0 \wedge (b_0 \triangleleft x_0)\nearrow\\
=&\langle P\, x_0\rangle\\
&a_0 \prec b_0 \wedge b_0 \prec x_0 \wedge x_0\nearrow\\
=&\\
&a_0 \prec b_0 \wedge b_0 \prec x_0 \wedge b_0 \prec x_0 \wedge x_0\nearrow\\
=&\langle \textit{Axioma 9 e } \ P\, x_0\rangle\\
&a_0 \prec (b_0 \triangleleft x_0) \wedge (b_0 \triangleleft x_0)\nearrow
\end{aligned}$$

□

Exercício 13. *Prove que*

$$(a \triangleleft x)\nearrow \Rightarrow x\nearrow$$

Prova.

Prova trivial quando se observa que

$$\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$$

ou equivalentemente que

$$\alpha \Leftarrow \alpha \wedge \beta$$

Note o que ocorre quando $\alpha = x \nearrow$ *e* $\beta = a \prec x$

$\square$

Assuma agora os seguintes axiomas para definir pertinência em relação a uma seqüência.

$$b \notin \perp \tag{10}$$

$$b \in a \triangleleft x = (b = a \vee b \in x) \tag{11}$$

Exercício 14. *Prove que*

$$b \in x <\!\!+\, a = (b = a \vee b \in x)$$

Exercício 15. *Prove que*

$$x \nearrow \Rightarrow (x <\!\!+\, a) \nearrow$$