

Solução Numérica da Equação de Laplace pelo Método das Diferenças Finitas

Introdução

Equações diferenciais parciais, aparecem com frequência na solução de problemas em diversas áreas do conhecimento. Uma dessas equações é a equação diferencial de Laplace, que aparece em diversos problemas tais como:

- Condução de Calor.
- Campo de potencial eletrostático.
- Escoamento irrotacional de um fluido perfeito (sem viscosidade).
- Deflecção de uma membrana Elástica.
- Torção de uma barra prismática.

Além de muitos outros problemas práticos. Neste texto, restringiremos nossa análise a um problema típico de condução de calor.

Condução de calor em uma placa

Considere uma placa submetida à temperaturas constantes no seu contorno, como ilustra a Figura 1. Sem perda de generalidade, assumiremos que a placa é quadrada com os lados de comprimento unitário e que pontos no seu interior podem ser descritos por $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

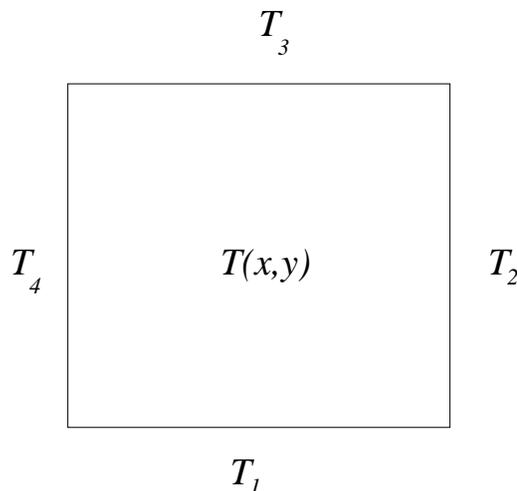


Figura 1: Placa quadrada sob temperatura prescrita no contorno

Considere $T(x, y)$ a temperatura em um ponto da placa. O problema de condução de calor consiste em determinar a temperatura no interior da placa, dadas as temperaturas no contorno. Para solucionar este problema teremos que resolver a equação de Laplace em duas dimensões:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

satisfazendo as seguintes condições de contorno:

$$T(x, y) = \begin{cases} T_1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0 \\ T_2 & , \quad x = 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ T_3 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 1 \\ T_4 & , \quad x = 0 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

A solução exata deste problema envolve o estudo de problemas de valor no contorno em equações diferenciais parciais. Estamos interessados na solução aproximada utilizando métodos numéricos. Para resolvê-lo, utilizaremos o método das diferenças finitas.

Método das Diferenças Finitas

O desenvolvimento do método das diferenças finitas consiste em:

1. Discretização do domínio em pequenos retângulos com base e altura constantes dadas, respectivamente, por Δx e Δy .
2. Para cada vértice dos retângulos, associamos uma incógnita nodal T_{ij} que representa a temperatura $T(x_i, y_j)$ no vértice (x_i, y_j) . A Figura 3 ilustra uma possível discretização do domínio.
3. Substituir as derivadas que aparecem na equação diferencial por aproximações, que denominamos de diferenças finitas.

A seguir descrevemos os processos de aproximações referentes ao terceiro item.

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{T(x_i, y_j) - T(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x} = D_x^- T_{ij}$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{T(x_{i+1}, y_j) - T(x_i, y_j)}{\Delta x} = D_x^+ T_{ij}$$

Desta duas aproximações podemos obter uma aproximação para a derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{D_x^+ T_{ij} + D_x^- T_{ij}}{\Delta x}$$

Substituindo as expressões para $D_x^- T_{ij}$ e $D_x^+ T_{ij}$ na equação acima, temos após alguns cálculos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{T(x_{i+1}, y_j) - 2T(x_i, y_j) + T(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x^2}$$

Note que nas expressões acima, $T(x_i, y_j)$ são temperaturas nodais, definidas nos vértices das subdivisões do domínio.

De forma similar, podemos obter uma aproximação para a derivada parcial com relação à y :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{T(x_i, y_{j+1}) - 2T(x_i, y_j) + T(x_i, y_{j-1}))}{\Delta y^2}$$

Finalmente podemos descrever a equação diferencial, segundo as aproximações de diferenças finitas, pela expressão abaixo:

$$\frac{T(x_{i+1}, y_j) - 2T(x_i, y_j) + T(x_{i-1}, y_j))}{\Delta x^2} + \frac{T(x_i, y_{j+1}) - 2T(x_i, y_j) + T(x_i, y_{j-1}))}{\Delta y^2} = 0$$

Considerando $\Delta x = \Delta y$, a equação acima reduz-se à:

$$T(x_{i+1}, y_j) + T(x_{i-1}, y_j) + T(x_i, y_{j+1}) + T(x_i, y_{j-1}) - 4T(x_i, y_j) = 0$$

Para simplificar é conveniente substituir as temperaturas nodais por uma notação mais simplificada. Supondo $T(x_i, y_j) = T_{ij}$, poderemos finalmente escrever:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{ij} = 0$$

Na Figura 2 indicamos os termos que contribuem para a equação de diferenças, descrita acima.

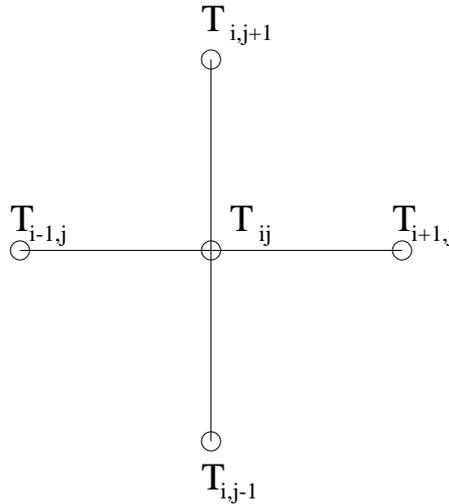


Figura 2: Temperaturas nodais na equação de Diferenças Finitas

Observamos que para cada nó da malha onde associamos uma incógnita nodal (pontos onde a temperatura não é fornecida pelas condições de contorno) estamos impondo a aproximação da equação de Laplace descrita pela Equação acima.

A Figura 3 exemplifica uma discretização através de uma malha com 9 (nove) temperaturas nodais a determinar ($T_{11}, T_{12}, \dots, T_{33}$) e nove equações simultaneas descritas para cada um dos nós. A solução aproximada por diferenças finitas resulta portanto na solução de um sistema linear de banda com nove incógnitas.

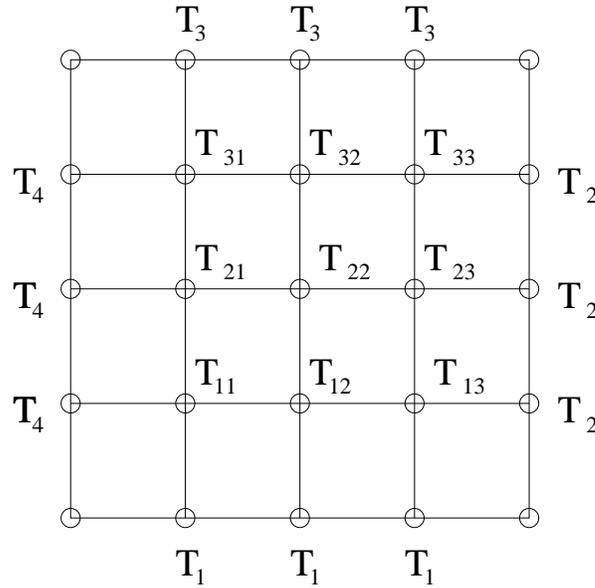


Figura 3: Discretização por Diferenças Finitas. Subdivisão do domínio em 16 retângulos

Armazenamento da Matriz dos coeficientes

Analizaremos, inicialmente, o exemplo tratado na seção anterior. A numeração da malha possibilita uma estrutura específica para a matriz dos coeficientes. É possível aumentar ou diminuir a esparsidade da matriz mediante uma troca de numeração. Na Figura 4, numeramos a malha no sentido horizontal, sempre da esquerda para a direita.

Para esta configuração obtemos um sistema $Ax = b$ de banda 7(sete) e ordem 9(nove), onde:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$x = \left(T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ T_5 \ T_6 \ T_7 \ T_8 \ T_9 \right)^t$$

$$b = \left(-125 \ 0 \ -50 \ -75 \ 0 \ -50 \ -175 \ -100 \ -150 \right)^t$$

Para generalizar, considere N nós na horizontal e M nós na vertical conforme a Figura 5.

Um ponto genérico p (que não esteja próximo ao contorno), representado na Figura 6, satisfaz a seguinte equação:

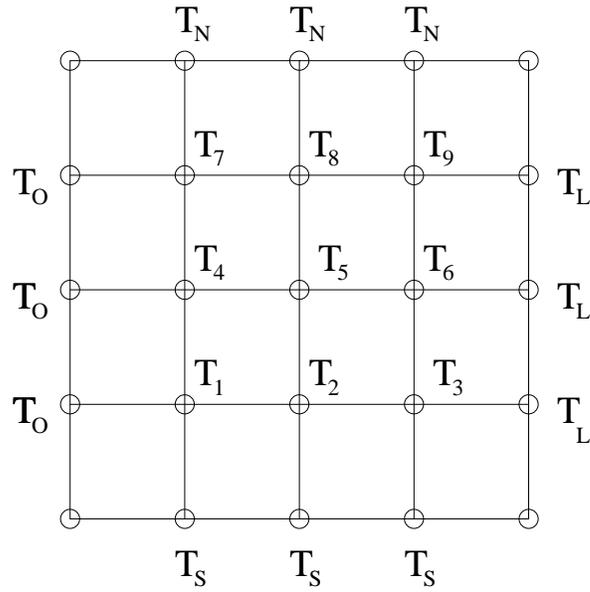


Figura 4: Numeração dos nós e condições de fronteira ($T_S = 0^\circ C$, $T_L = 50^\circ C$, $T_N = 100^\circ C$, $T_O = 75^\circ C$)

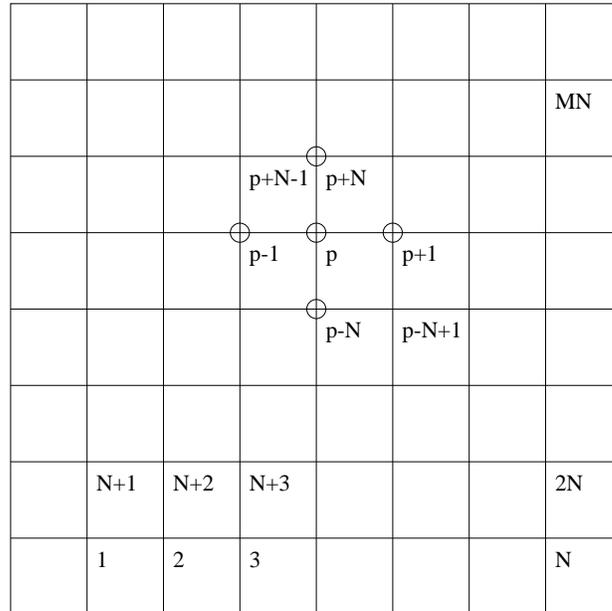


Figura 5: Malha generalizada com MN nós

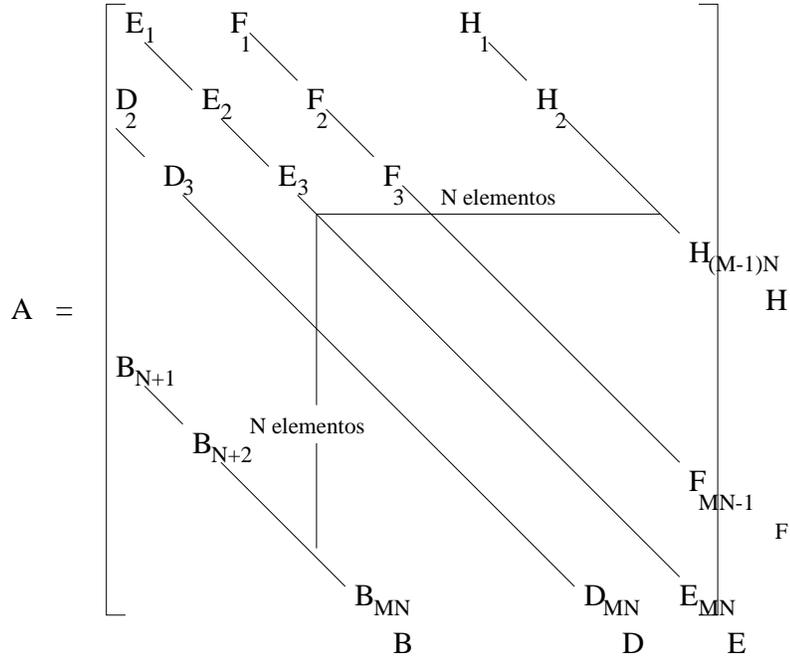


Figura 6: Matriz dos coeficientes para a malha generalizada

$$B_p T_{p-N} + D_p T_{p-1} + E_p T_p + F_p T_{p+1} + H_p T_{p+N} = 0$$

onde B , D , E , F e H são vetores que estão representados na Figura 6.

A é uma matriz de banda $2N+1$. Todos os coeficientes não nulos de A podem ser armazenados nos vetores B , D , E , F e H . O sistema linear resultante pode ser resolvido por métodos iterativos ou por métodos diretos. Em geral, os métodos iterativos são os escolhidos, pois preservam a esparsidade da matriz.