$5^{\underline{o}}$ Exercício de Métodos Numéricos - 04/2
Equação do Poisson Bidimensional Transiente - Método dos Gradientes Conjugados

Data de entrega: 20 de Janeiro de 2005

Considerar os algoritmos implícito e Crank-Nicolson para resolver a equação de Poisson bidimensional pelo método das diferenças finitas. Desejamos encontrar $u(x, y, t)$ que satisfaça a equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x, y, t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y, t) \tag{1}$$

onde $(x, y) \in \mathcal{R}$, uma região do plano (x, y), $a(x, y, t) > 0$ e $t > 0$. A equação diferencial (1) satisfaz seguintes condições:

- Condições de Contorno:
  $u(x, y, t) = g(t)$ ou $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = q(t)$ no contorno de $\mathcal{R}$
- Condições Iniciais:
  $u(x, y, 0) = p(x, y)$ em $\mathcal{R}$

Deseja-se obter a solução $u(x, y, t)$ no interior de um domínio retangular de dimensões $\mathcal{R} = (0, l_1) \times (0, l_2)$ para $t \in (0, 1)$. Considere uma subdivisão do domínio em células retangulares, sendo $N + 1$ divisões na horizontal e $M + 1$ divisões na vertical, respectivamente, de dimensões h_x e h_y e uma divisão no tempo $t_k = k\Delta t$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Utilize a rotina de solução do sistema linear dada pelo método iterativo Seidel (ou SOR) e introduza no seu código rotinas para obter a solução do sistema simétrico resultante em cada passo de tempo pelo método dos Gradientes Conjugados. Considere 4 (quatro) versões do método:

- Método dos Gradientes Conjugados;
- Método dos Gradientes Conjugados com precondicionador diagonal;
- Método dos Gradientes Conjugados com precondicionador "Fatorização Incompleta de Cholesky", isto é, $M = (L + D)D^{-1}(L^t + D)$;
- Método dos Gradientes Conjugados com precondicionador "Fatorização Incompleta de Cholesky Modificado", definido em dois estágios:
  1. $D^{-1/2}AD^{-1/2}D^{1/2}x = D^{-1/2}b \Rightarrow \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$
  2. $M^{-1}\tilde{A}\tilde{x} = M^{-1}\tilde{b} \Rightarrow \bar{A}\tilde{x} = \bar{b}$, onde $M = (\tilde{L} + I)(\tilde{L}^t + I)$.

Testes Numéricos

0.1 Equação do Calor com condutividade unitária

Teste o seu programa considerando a equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t) \quad \text{em } \mathcal{R} = (0, 1) \times (0, 1) \tag{2}$$

para $g(t) = 0$, $p = 0$ e $f(x, y)$ é tal que $u(x, y) = t^2 x(x-1)y(y-1)$ é a solução exata da equação.

- Apresente o gráfico da solução encontrada e o gráfico da solução exata nos tempos: $t = 0.5$ e $t = 1.0$ para os dois tipos de avanço no tempo considerando o método dos Gradientes Conjugados na solução do sistema linear.

- Para cada tipo de método de avanço no tempo faça um estudo comparativo entre o método SOR e o método dos Gradientes Conjugados considerando todos os pré-condicionadores implementados. Comparando número de iterações e tempo de processamento para cada caso. Qual foi a melhor combinação de métodos para resolver o problema proposto?