

Dicas de solução da Lista 2 - Cálculo Numérico - (Interpolação Polinomial)

Prof. Isaac Pinheiro - 2008/1

1. Fazer os exercícios do capítulo 3 do livro texto (páginas 173 e 174): Seções 3.1, 3.2, 3.3, 3.5 3 3.6

As respostas destes exercícios estão no livro.

2. Para a função dada, seja $x_0 = 0$, $x_1 = 0,6$ e $x_2 = 0,9$. Construa polinômios de grau $n = 2$, para aproximar $f(0,45)$ e encontre o valor do erro verdadeiro.

a) $f(x) = \cos x$;

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$;

a) $f(x) = \cos(x)$

Usando Polinômios de Lagrange:

$$L_2(x) = \tilde{P}_0(x)f(x_0) + \tilde{P}_1(x)f(x_1) + \tilde{P}_2(x)f(x_2)$$

onde:

$$\tilde{P}_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \implies \tilde{P}_0(0,45) = 0,125$$

$$\tilde{P}_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \implies \tilde{P}_1(0,45) = 1,125$$

$$\tilde{P}_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \implies \tilde{P}_2(0,45) = -0,25$$

$$\implies f(0,45) \approx L_2(0,45) = \tilde{P}_0(0,45)\cos(0) + \tilde{P}_1(0,45)\cos(0,6) + \tilde{P}_2(0,45)\cos(0,9) = 0,897625$$

Cálculo do erro verdadeiro:

$$|f(0,45) - L_2(0,45)| = |\cos(0,45) - L_2(0,45)| \approx 2,822 \cdot 10^{-3}$$

Usando Polinômios de Newton

$$P_2(x) = a_0N_0(x) + a_1N_1(x) + a_2N_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

onde

$$a_0 = f[x_0] = f(x_0) = \cos(0) = 1$$

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\cos(0,6) - \cos(0)}{0,6 - 0} = -0,292$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -0,428$$

Esses valores podem ser calculados através da tabela das diferenças divididas:

x	ordem 0	ordem 1	ordem 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 1$		
		$f[x_0, x_1] = -0,292$	
$x_1 = 0,6$	$f[x_1] = 0,825$		$f[x_0, x_1, x_2] = -0,428$
		$f[x_1, x_2] = -0,677$	
$x_2 = 0,9$	$f[x_2] = 0,622$		

Portanto, $P_2(0,45) = 0,89749$.

Cálculo do erro verdadeiro:

$$|f(0,45) - P_2(0,45)| = |\cos(0,45) - P_2(0,45)| \approx 2,957 \cdot 10^{-3}$$

3. Determine uma cota superior do erro de truncamento, para as aproximações calculadas no exercício anterior.

$$a) |E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq T_n^{max}(x)$$

onde $T_n^{max}(x)$ é o valor máximo para $|T_n(x)|$, com

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \text{ para } \xi \in [x_0, x_n]$$

Então

$$|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{|f'''(\xi)|_{max}}{6} |(x-0)(x-0,6)(x-0,9)|, \text{ com } \xi \in \{0; 0,6; 0,9\}$$

$$f(x) = \cos(x) \implies f'''(x) = \sin(x)$$

$$f'''(0) = 0; f'''(0,6) \approx 0,565; \underbrace{f'''(0,9) \approx 0,7833}_{Maximo}$$

Portanto

$$|E_2(0,45)| \leq \frac{0,7833}{6} |(0,45-0)(0,45-0,6)(0,45-0,9)| \approx 3,965 \times 10^{-3}$$

4. Sabendo-se que $f(0,81) = 16,94410$, $f(0,83) = 17,56492$, $f(0,86) = 18,50515$ e $f(0,87) = 18,82091$, calcule um valor aproximado de $f(0,84)$, usando:

a) Polinômio Interpolador de Lagrange de grau $n = 1, 2, 3$;

b) Polinômio Interpolador de Newton de grau $n = 1, 2, 3$;

a) Polinômio Interpolador de Lagrange de grau $n = 1$:

$$L_1(x) = \tilde{P}_0(x)f(x_0) + \tilde{P}_1(x)f(x_1)$$

onde

$$\tilde{P}_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}; \tilde{P}_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}, \text{ com } x_0 = 0,83 \text{ e } x_1 = 0,86$$

$$\implies L_1(0,84) = 17,88073$$

Polinômio Interpolador de Lagrange de grau $n = 2$:

$$L_2(x) = \tilde{P}_0(x)f(x_0) + \tilde{P}_1(x)f(x_1) + \tilde{P}_2(x)f(x_2)$$

$$\tilde{P}_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$\tilde{P}_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$\tilde{P}_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$x_0 = 0,83, x_1 = 0,86 \text{ e } x_2 = 0,87$$

$$\implies L_2(0,84) = 17,87718$$

$$L_3(x) = \tilde{P}_0(x)f(x_0) + \tilde{P}_1(x)f(x_1) + \tilde{P}_2(x)f(x_2) + \tilde{P}_3(x)f(x_3)$$

onde

$$\tilde{P}_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$\tilde{P}_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$\tilde{P}_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

com $x_0 = 0,81$, $x_1 = 0,83$, $x_2 = 0,86$ e $x_3 = 0,87$.

b) Polinômio Interpolador de Newton de grau $n = 1, 2, 3$:

Neste caso, devemos determinar os seguintes polinômios

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_2) + a_3(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)$$

Os coeficientes a_i podem ser determinados construindo uma tabela de diferenças divididas conforme feito no exercício 1.

5. Seja uma função $f(x)$ tabelada nos pontos x_i igualmente espaçados. Seja h o passo e suponhamos que $|f''(x)| \leq M$ em todo intervalo da tabela. Mostre que, ao se fazer uma interpolação linear da função $f(x)$ no ponto x tomando os pontos consecutivos x_i e x_{i+1} , com $x_i < x < x_{i+1}$, o valor absoluto do erro cometido é no máximo $\varepsilon = \frac{1}{8}Mh^2$.

Observe que a cota superior do erro é

$$|E_1(x)| = |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M}{2} |(x - x_i)(x - x_{i+1})|$$

Note que $g(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1})$ é uma função polinomial do segundo grau e seu gráfico é uma parábola com concavidade para cima, mas em $[x_i, x_{i+1}]$, $|g(x)|$ tem concavidade para baixo e seu ponto de máximo neste intervalo está em $x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

Portanto, no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $|g(x)|_{max} = |g(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})|$. Basta agora substituir esse resultado na expressão acima.