

Lista 1 - Cálculo Numérico - (Sistemas Lineares)

Prof. Isaac Pinheiro - 2008/1

1. Fazer os exercícios do capítulo 2 do livro texto (página 121): Seção 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.8 e 2.9

2. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 10x_1 + x_2 + x_4 = -8 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

- Resolva o sistema pelo método de Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.
- Utilizando o resultado do item anterior, escreva o sistema linear $LUx = Pb$, equivalente ao sistema linear dado, onde P é uma matriz de permutação. Determine a matriz inversa.
- Podemos determinar a solução aproximada do sistema, usando o Método de Gauss - Seidel para qualquer aproximação inicial ? justifique sua resposta.

3. Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 0,78000x_1 - 0,56300x_2 = 0,21700 \\ 0,91300x_1 - 0,65900x_2 = 0,25400 \end{cases}$$

- Se $\tilde{x}_1 = (0,34100; -0,08700)$ e $\tilde{x}_2 = (0,99900; -1,00100)$ são duas soluções aproximadas, qual das duas é a melhor ? Justifique sua resposta.
- Resolva o sistema dado, usando o Método de Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial, trabalhando com 5 casas decimais.
- Qual a solução exata deste sistema ? Este sistema é bem condicionado ? justifique sua resposta.

4. Resolva o sistema a seguir, avaliando o erro cometido em cada caso.

$$\begin{cases} 0,0002x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$$

- Pelo método de Eliminação de Gauss;
- Pelo método de Eliminação de Gauss com Pivotação Parcial;

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

- Mostre que este sistema não satisfaz o critério de linhas.
- Mostre que este sistema não satisfaz o critério de Sassenfeld.
- O que se pode afirmar sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, quando aplicados a este sistema?

- d) Mostre que o sistema obtido permutando-se as duas primeiras equações satisfaz o critério de Sassenfeld.
- d) Usando o método de Gauss-Seidel, determine a solução aproximada do sistema, com a permutação sugerida no item anterior e erro

$$\|x^{k+1} - x^k\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, 4} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$$

6. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} kx_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + 6x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

- a) Determine para que valores de k se tem garantia de que o método de Jacob e Gauss-Seidel, geram uma sequência convergente para qualquer solução inicial.
- b) Escolha o menor valor inteiro positivo de k e determine uma solução aproximada do sistema, usando os métodos acima, com erro

$$\|x^{k+1} - x^k\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, 4} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$$

- c) Qual dos dois métodos converge mais rápido ?

7. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & & & = b_2 \\ & a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & = b_3 \\ & & a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = b_4 \end{cases}$$

- a) Considerando a forma tridiagonal da matriz dos coeficientes, desenvolva um algoritmo ótimo, para resolver o sistema pelo Método de Eliminação de Gauss (sem pivoteamento parcial).

Considere os valores numéricos: $a_{11} = a_{33} = 2$, $a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = -1$, $a_{23} = a_{32} = a_{44} = 1$, $a_{22} = 3$, $b_1 = -5$, $b_2 = -7$, $b_3 = -6$ e $b_4 = 1$.

- b) Determine a solução pelo algoritmo do item a).
- c) Determine o número total de operações de multiplicação e adição.