

**Programa de Pós Graduação em Informática-  
UFES/CT**  
**Disciplina: TEI - Formulações Estabilizadas do  
Método dos Elementos Finitos - 14/1**  
**Formulação Estabilizada SUPG**

**Data de entrega: 15/05/2014**

O objetivo deste trabalho é implementar um código de elementos finitos para problemas bidimensionais por elementos triangulares lineares utilizando a formulação estabilizada SUPG. O problema de valor no contorno (PVC) bidimensional pode ser definido por:

*Dado o tensor  $\mathbf{k}$ , o vetor  $\boldsymbol{\beta}$  e a constante positiva  $\sigma$ , encontrar  $u(x, y)$  tal que*

$$-\nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla u) + \boldsymbol{\beta} \nabla u + \sigma u = f \text{ em } \Omega \quad (1)$$

$$u = g \text{ em } \Gamma_g \quad (2)$$

$$-\mathbf{k} \nabla u \cdot \mathbf{n} = h \text{ em } \Gamma_h \quad (3)$$

Considere o domínio  $\Omega$  um retângulo em  $\mathbb{R}^2$ . A matriz  $\mathbf{k}$  uma matriz diagonal constante em todo o domínio e o vetor  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_x(x, y), \beta_y(x, y))^T$ . O primeiro termo da Eq. (1) é denominado **termo difusivo**, o segundo **termo advectivo** e o último **termo reativo**.

O código deve ter uma estrutura modularizada levando em consideração os três grandes módulos:

- **Pré-processamento:** leitura dos dados, definição dos parâmetros do problema e das estruturas de dados a serem utilizadas. Neste módulo deve ser previsto:
  - Leitura dos parâmetros de entrada: número de nós ( $n_{nos}$ ), número de elementos ( $n_{el}$ ), constantes físicas ( $k_x, k_y, \beta_x, \beta_y, \sigma, f, g, h$ ), dados para montagem da malha, dados para o método de solução do sistema linear, etc ...
  - Geração da malha utilizando o Gerador de malha EasyMesh<sup>1</sup>.
  - Montagem das conectividades dos elementos.
  - Leitura das condições de contorno de valor prescrito.
  - Definição dos nós prescritos e nós incógnitas (cálculo no número de incógnitas  $N_{eq}$ ).
- **Processamento:** montagem e solução do sistema linear resultante (resolver o sistema linear pelo método iterativo não estacionário GMRES), levando em consideração que o problema pode ser resolvido com a formulação padrão de Galerkin e a formulação estabilizada SUPG:
  - Montagem da matriz do elemento e do vetor dos termos independentes em cada elemento da malha. Para tal observar que para o elemento triangular linear não há necessidade de cálculo de integrais aproximadas.

---

<sup>1</sup>Bojan, EasyMesh - A two-dimensional quality Mesh Generation

- Montagem da matriz Global se for o caso.
  - Montagem do vetor global dos termos independentes incluindo o tratamento das condições de valor e fluxo prescritos.
  - Calcular a solução do sistema linear resultante.
- **Pós-processamento:** recuperar os valores nodais para plotar gráfico da solução utilizando o visualizador Paraview<sup>2</sup> ou GnuPlot<sup>3</sup>.

## Experimentos Sugeridos

Para todos os problemas a seguir, escolha 3 tipos de malha (pequena, média e grande) para realizar seus testes e compare a solução Galerkin com SUPG com relação acuidade e desempenho computacional (número de iterações GMRES e tempo de processamento).

### Problema com solução conhecida

Considere a equação de Laplace no interior do quadrado de dimensões  $(-1, 1) \times (-1, 1)$  satisfazendo as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 - 1, & -1 \leq x \leq 1 & \quad y = -1 \text{ e } y = 1 \\ u(x, y) &= 1 - y^2, & -1 \leq y \leq 1 & \quad x = -1 \text{ e } x = 1 \end{aligned}$$

Para a equação de Laplace tem-se  $\mathbf{k} = \mathbf{I}$ ,  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ ,  $\sigma = 0$  e  $f = 0$ . A solução exata é dada por  $u(x, y) = x^2 - y^2$ . Considere malhas de tamanhos variados, trace o gráfico da solução aproximada utilizando por exemplo o gnuplot.

### Problema Difusivo-adveectivo 1

A equação de difusão-advecção bidimensional é um dos modelos mais usados para avaliar diversas estratégias numéricas.  $\mathbf{k}$  é um tensor matricial e  $\boldsymbol{\beta}$  é um vetor, ambos de ordem 2. Quando  $\|\mathbf{k}\|$  é muito menor que  $\|\boldsymbol{\beta}\|$  o fenômeno físico é dito ser de advecção dominante, ou seja, a solução da equação apresenta gradiente elevado em partes do domínio. Neste caso as estratégias usuais de solução pelos métodos numéricos (por exemplo, método das diferenças finitas ou método dos elementos finitos) apresentam instabilidades numéricas indesejáveis, sendo necessário utilizar estratégias de estabilização. Considere a Eq. (1) no interior do quadrado de dimensões  $(0, 1) \times (0, 1)$  sendo  $\mathbf{k} = k\mathbf{I}$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (1, 1)^T$ ,  $\sigma = 0$  e  $f = 0$  satisfazendo as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u(1, y) = u(x, 1) = 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0.3 \\ 1, & \text{se } x > 0.3 \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Open Source Scientific Visualization, [www.paraview.org](http://www.paraview.org)

<sup>3</sup>Portable command-line driven graphing utility, [www.gnuplot.info](http://www.gnuplot.info)

Considere uma variação decrescente da ordem de grandeza do parâmetro  $k$ , ou seja,  $k = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-n}$ . Faça um relato da qualidade da solução aproximada encontrada a medida que a ordem de grandeza de  $k$  decresce para uma determinada malha.

## Problema Difusivo-advectivo 2

Considere a Eq. (1) no interior do quadrado de dimensões  $(0, 1) \times (0, 1)$  sendo  $\mathbf{k} = k\mathbf{I}$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (1, 0)^T$ ,  $\sigma = 0$  e  $f = 1$  satisfazendo a condições de contorno homogêneas, ou seja,  $u(x, y) = 0$  para  $(x, y) \in \Gamma$ . Considere uma variação decrescente da ordem de grandeza do parâmetro  $k$ , ou seja,  $k = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-n}$ . Faça um relato da qualidade da solução aproximada encontrada a medida que a ordem de grandeza de  $k$  decresce para uma determinada malha.

## Problema Difusivo-advectivo 3

Considere a Eq. (1) no interior do quadrado de dimensões  $(-1, 1) \times (-1, 1)$ , conforme Fig. 1, sendo  $\mathbf{k} = k\mathbf{I}$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (-y, x)^T$ ,  $\sigma = 0$  e  $f = 0$  satisfazendo a condições de contorno homogêneas, ou seja,  $u(x, y) = 0$  para  $(x, y) \in \Gamma$ . Supondo o ponto  $O = (0, 0)$  e o ponto  $A = (0, -1)$ , o segmento  $OA$  é uma fronteira interna com valores prescritos,  $u(x, y) = u_0(0, y) = -\text{sen}(2\pi y)$ . Considere uma variação decrescente da ordem de grandeza do parâmetro  $k$ , ou seja,  $k = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-n}$ . Faça um relato da qualidade da solução aproximada encontrada a medida que a ordem de grandeza de  $k$  decresce para uma determinada malha.

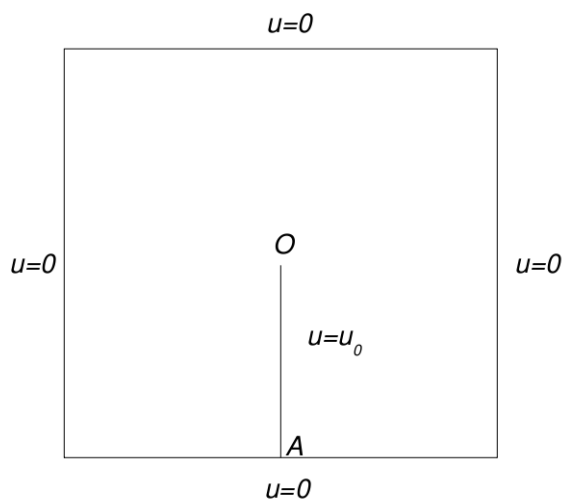


Figura 1: Geometria do seno em rotação

## Problema Difusivo-reativo 1

A equação de difusão-reação bidimensional também figura com um importante modelo matemático para avaliar diversas estratégias numéricas. Quando  $\|\mathbf{k}\|$  é muito menor que  $\|\sigma\|$  o fenômeno físico é dito ser de reação dominante. Neste caso as estratégias usuais de solução pelos métodos numéricos (por exemplo, método das diferenças finitas ou método dos elementos finitos) apresentam instabilidades numéricas indesejáveis, sendo necessário utilizar estratégias de estabilização. Considere a Eq. (1) no interior do quadrado de dimensões  $(0, 1) \times (0, 1)$  sendo  $\mathbf{k} = k\mathbf{I}$ ,  $\beta = \mathbf{0}$ ,  $\sigma = 1$  e  $f = 0.5$  satisfazendo a condições de contorno

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ y(0, y) &= 0 \text{ para } y < 1 \\ u(x, 1) &= u(1, y) = 1 \end{aligned}$$

Considere uma variação decrescente da ordem de grandeza do parâmetro  $k$ , ou seja,  $k = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-n}$ . Faça um relato da qualidade da solução aproximada encontrada a medida que a ordem de grandeza de  $k$  decresce para uma determinada malha.

## Problema Difusivo-reativo 2 - Resfriador bidimensional

Considere o problema de resfriar uma massa aquecida como mostra a Fig. 2. Exemplos podem incluir o resfriamento de chips de computadores ou amplificadores elétricos. O modelo matemático que descreve a transferência de calor nas direções  $x$  e  $y$  é dado pela Eq. (4). Detalhes sobre a definição do modelo matemático pode ser encontrado em <sup>(4)</sup>, disponível na página do curso.

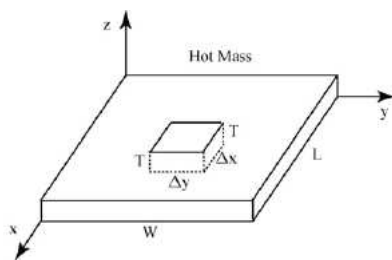


Figura 2: Geometria do Resfriador 2d

$$-K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{2c}{T} u = \frac{2c}{T} u_{ref} \quad \text{em } \Omega = (0, L) \times (0, W) \quad (4)$$

onde  $K$  é a condutividade térmica (considerada aqui constante),  $c$  é o coeficiente de transferência de calor,  $T$  é a altura do resfriador,  $u_{ref}$  é a temperatura de referência.

<sup>4</sup>R. E. White, *Computational Modeling with Methods and Analysis*, Department of Mathematics, North Carolina State University, 2003

Encontre a temperatura no interior do resfriador considerando as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 70 \\u(x, W) &= 70 \\u(0, y) &= 200 \\u(L, y) &= 70\end{aligned}\tag{5}$$

e os seguintes parâmetros físicos:  $T = 2$ ,  $L = W = 1$ ,  $K = 1$ ,  $u_{ref} = 70$ . Para o coeficiente de transferência de calor considere os seguintes valores:  $c = 1$ ,  $c = 10$  e  $c = 100$ . Neste teste todas as constantes físicas estão adimensionalizadas.

## Desafio 1

Na aplicação do Resfriador bidimensional (item anterior) foi considerado uma condição de contorno simplificada. Porém, fisicamente é natural que no contorno  $(L, y)$  a condição de contorno seja do tipo mista, isto é:

$$K \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(L, y) = c(u_{ref} - u(L, y))\tag{6}$$

Faça as modificações necessárias no seu código para que essa condição seja considerada. Faça um estudo similar aquele do item anterior do comportamento do resfriador para essa nova condição.