

Método Estabilizados Para Problemas de Convecção-Difusão-Reação

Prof. Isaac P. Santos

Disciplina: Elementos Finitos - 2012/2
Programa de Pós-Graduação em Informática - PPGI
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES,
isaac.santos@ufes.br

Sumário

1. Introdução
2. Equação de Convecção-Difusão-Reação
3. Método de Galerkin
4. Métodos Estabilizados:
 - ▶ SUPG - *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*
 - ▶ GLS - *Galerkin/Least Squares*
 - ▶ USFEM - *Unusual Finite Element Method*

Equação de Convecção-Difusão-Reação

Achar $u = u(x, y)$ tal que

$$-\epsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \sigma u = f, \text{ em } \Omega;$$

$$u = g, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

- ▶ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto limitado com fronteira poligonal, $\Gamma = \partial\Omega$;
- ▶ $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$;
- ▶ $\sigma \geq 0$ e $\epsilon > 0$ são constantes, $f \in L^2(\Omega)$;
- ▶ $\nabla \cdot \beta = 0$, $g = 0$.

Aplicações

Modelagem matemática de vários problemas em engenharia e ciências naturais:

- ▶ eletro-química;
- ▶ turbulência;
- ▶ dinâmica de populações;
- ▶ acústica;

⇒ transporte em geral.

Formulação Variacional

Achar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

onde $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear dada por

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \left(\epsilon \nabla u \cdot \nabla v + (\beta \cdot \nabla u)v + \sigma uv \right) d\Omega;$$

e (f, v) é uma forma linear (produto interno) em $L^2(\Omega)$ dado por

$$(f, v) = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

Lema de Lax-Milgram \Rightarrow Existência e unicidade de solução

Método de Galerkin - Problema Discreto

Achar $u_h \in X_h \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in X_h \subset H_0^1(\Omega).$$

Análise de Convergência : $\|u - u_h\|_{H^1} \leq C \frac{\max\{|\beta|_\infty, \sigma\}}{\epsilon} h |u|_{H^2}$.

- ▶ $\alpha = \frac{|\beta|_\infty h}{2\epsilon}$ (Péclet local);
- ▶ $\gamma = \frac{\sigma h}{|\beta|_\infty}$ (Damköhler local).

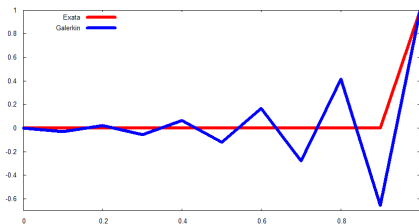
Dificuldades Numéricas:

$$\epsilon \ll |\beta|_\infty h \quad \text{e/ou} \quad \epsilon \ll \sigma h^2.$$

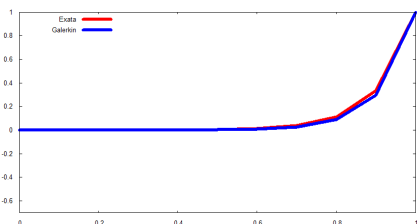
Método de Galerkin

Exemplo 01: Equação Convecção-Difusão-Reação Unidimensional

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + u' + u & = 0 \text{ em } (0, 1); \\ u(0) & = 0; \\ u(1) & = 1. \end{cases}$$



(a) $\epsilon = 0.01$ - Peclet = 5



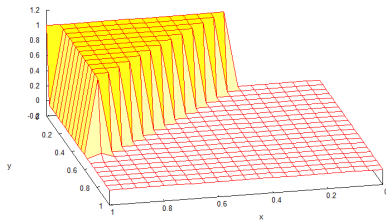
(b) $\epsilon = 0.1$ - Peclet = 0.5

Método de Galerkin

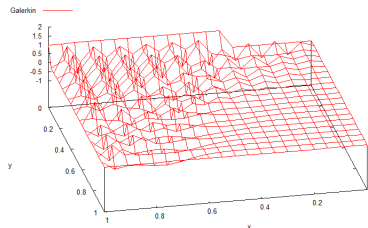
Exemplo 02: Equação de Convecção-Difusão Bidimensional

$$\epsilon = 10^{-12}; \quad \beta = (1, 1)^T; \quad f = 0.$$

Condições de Contorno: $u = \begin{cases} 1 & \text{para } 0.3 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$



(c) Solução Exata



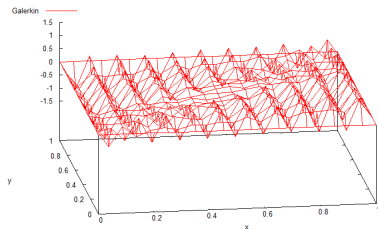
(d) Método de Galerkin

Método de Galerkin

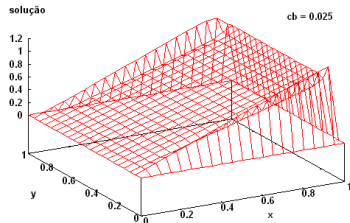
Exemplo 03: Equação de Convecção-Difusão Bidimensional

$$\epsilon = 10^{-9}; \quad \beta = (1, 0)^T; \quad f = 1.$$

Condições de Contorno de Dirichlet Homogêneas: $u(x, y) = 0$ em Γ .



(e) Método de Galerkin



(f) Método SGS

Métodos Variacionais Estabilizados

Consistem em adicionar um termo à forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$, sem comprometer a *consistência* do método de Galerkin clássico:

$$\boxed{\text{Mét. Estabilizado}} = \boxed{\text{Mét. Galerkin}} + \boxed{\text{Termo de Perturbação}}$$

Achar $u_h \in X_h$ tal que

$$B(u_h, v_h) + E(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in X_h.$$

Os métodos estabilizados também são conhecidos como métodos de **Petrov-Galerkin**.

Métodos Variacionais Estabilizados

Achar $u_h \in X_h$ tal que

$$B(u_h, v_h) + E(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in X_h,$$

onde

$$E(u_h, v_h) = \sum_{T_h \in \mathcal{T}_h} \int_{T_h} (\mathcal{L}u_h - f)_{\tau_h} \mathcal{P}(v_h) d\Omega.$$

- ▶ $\mathcal{P}(\cdot)$ é um operador aplicado no espaço das funções testes - caracteriza cada método estabilizado;
- ▶ τ_h é um parâmetro de estabilização;
- ▶ $(\mathcal{L}u_h - f) = R(u_h)$ é o resíduo da equação diferencial.

Métodos Variacionais Estabilizados

Método SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) (Brooks e Hughes, 1982; Johnson et al., 1984);

$$E(u_h, v_h) = \sum_{T_h \in \mathcal{T}_h} \int_{T_h} (\mathcal{L}u_h - f)_{\mathcal{T}_h} \mathcal{P}(v_h) d\Omega.$$

No método SUPG, o operador $\mathcal{P}(\cdot)$ é dado por

$$\mathcal{P}(v_h) = \beta \cdot \nabla v_h.$$

O resíduo da equação de difusão-convecção-reação é

$$\mathcal{L}u_h - f = -\epsilon \Delta u_h + \beta \cdot \nabla u_h + \sigma u_h - f$$

e o parâmetro de estabilização está no próximo slide.

Métodos Variacionais Estabilizados

Parâmetro de Estabilização do método SUPG:

$$\tau_h = \frac{h}{2|\beta|} \xi$$

$$\xi = \max\left\{0, 1 - \frac{1}{Peclet}\right\}$$

Obs: O método SUPG, aplicado ao problema de **convecção-difusão** estacionário, unidimensional, com $f = 0$, com coeficientes constantes e usando interpolação linear é nodalmente exato com

$$\tau_h = \frac{h}{2|\beta|} \left(\coth(Peclet) - \frac{1}{Peclet} \right).$$

Métodos Variacionais Estabilizados

Método GLS (*Galerkin/Least Squares*) (Hughes, Franca e Hulbert, 1989);

$$E(u_h, v_h) = \sum_{T_h \in \mathcal{T}_h} \int_{T_h} (\mathcal{L}u_h - f)_{T_h} \mathcal{P}(v_h) d\Omega.$$

No método GLS, o operador $\mathcal{P}(\cdot)$ é dado por

$$\mathcal{P}(v_h) = \mathcal{L}v_h = -\epsilon \Delta v_h + \beta \cdot \nabla v_h + \sigma v_h.$$

O resíduo da equação de difusão-convecção-reação é

$$\mathcal{L}u_h - f = -\epsilon \Delta u_h + \beta \cdot \nabla u_h + \sigma u_h - f.$$

Em geral, utiliza o mesmo parâmetro de estabilização do método SUPG.

Métodos Variacionais Estabilizados

Método USFEM (*Unusual Finite Element Method*) (Franca e Valentim, 2000);

$$E(u_h, v_h) = \sum_{T_h \in \mathcal{T}_h} \int_{T_h} (\mathcal{L}u_h - f)_{T_h} \mathcal{P}(v_h) d\Omega.$$

No método GLS, o operador $\mathcal{P}(\cdot)$ é dado por

$$\mathcal{P}(v_h) = -\epsilon \Delta v_h - \beta \cdot \nabla v_h + \sigma v_h.$$

O resíduo da equação de difusão-convecção-reação é

$$\mathcal{L}u_h - f = -\epsilon \Delta u_h + \beta \cdot \nabla u_h + \sigma u_h - f.$$

O parâmetro de estabilização do método USFEM está no próximo slide.

Métodos Variacionais Estabilizados

Parâmetro de Estabilização do método USFEM:

$$\tau_h = \frac{1}{\frac{2\epsilon}{m_k h^2} \zeta(Pe_2) + \sigma \zeta(Pe_1)}$$

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ x, & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

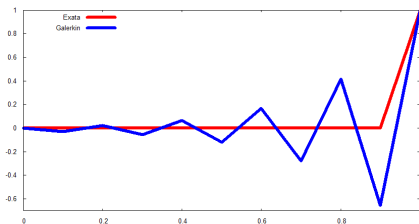
$$Pe_1 = \frac{2\epsilon}{m_k \sigma h^2}, Pe_2 = \frac{m_k |\beta| h}{\epsilon},$$

$$m_k = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{elementos lineares}$$

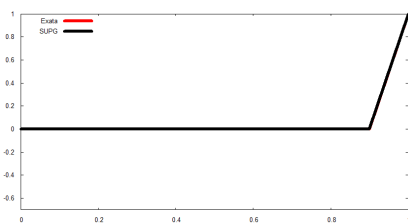
Experimentos Numéricos - método SUPG

Exemplo 03: Equação Convecção-Difusão-Reação Unidimensional

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + u' + u & = 0 \text{ em } (0, 1); \\ u(0) & = 0; \\ u(1) & = 1. \end{cases}$$



(g) Galerkin X Exata



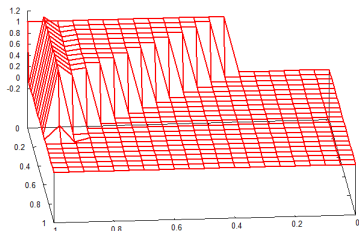
(h) SUPG X Exata

Experimentos Numéricos - método SUPG

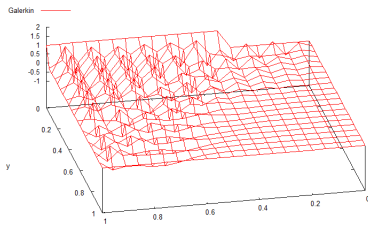
Exemplo 04: Equação Convecção-Difusão Bidimensional

$$\epsilon = 10^{-12}; \quad \beta = (1, 1)^T; \quad f = 0.$$

Condições de Contorno: $u = \begin{cases} 1 & \text{para } 0.3 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$



(i) Solução SUPG



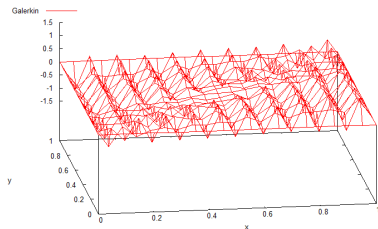
(j) Método de Galerkin

Experimentos Numéricos - método SUPG

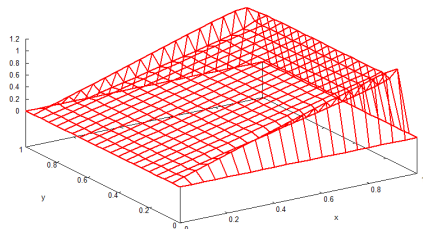
Exemplo 05: Equação Convecção-Difusão Bidimensional

$$\epsilon = 10^{-9}; \quad \beta = (1, 0)^T; \quad f = 1.$$

Condições de Contorno de Dirichlet Homogêneas: $u(x, y) = 0$ em Γ .



(k) Método de Galerkin



(l) Método SUPG