

Método de Elementos Finitos - Problema Bidimensional

Prof. Isaac P. Santos

Disciplina: Elementos Finitos - 2012/2
Programa de Pós-Graduação em Informática - PPGI
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES,
isaac.santos@ufes.br

Problema Modelo - Bidimensional

Achar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$-\nabla \cdot (K \nabla u) + bu = f, \quad \text{em } \Omega; \quad (1)$$

$$u = g, \quad \text{em } \Gamma_g; \quad (2)$$

$$K \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} = h, \quad \text{em } \Gamma_h, \quad (3)$$

onde

$$\partial\Omega = \Gamma_g \cup \Gamma_h,$$

com

$$\Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset.$$

Problema Formulação Variacional Discreta

Achar $u_h = w_h + G_h \in V_{D,h}$, $w_h \in V_h$ tal que

$$a(v_h, w_h) = (v_h, f) + (v_h, h)_{\Gamma_h} - a(v_h, G_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

onde

$$a(v_h, w_h) = \int_{\Omega} (\nabla v_h \cdot K \nabla w_h + \sigma v_h w_h) d\Omega;$$

$$(v_h, f) = \int_{\Omega} f v_h d\Omega;$$

$$(v_h, h)_{\Gamma_h} = \int_{\Gamma_h} v_h h d\Gamma;$$

$$V_h = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ em } \Gamma_g\};$$

$$V_{D,h} = \{v \in H^1(\Omega) | v = g \text{ em } \Gamma_g\};$$

$$a(v_h, G_h) = \int_{\Omega} (\nabla v_h \cdot K \nabla G_h + \sigma v_h G_h) d\Omega.$$

Problema Formulação Variacional Discreta

G_h é uma aproximação (função polinomial linear por partes) de G tal que

$$G_h(z_i) = \begin{cases} g(z_i), & \text{se } z_i \in \Gamma_g \quad (\text{pontos nodais prescritos}); \\ 0, & \text{se } z_i \notin \Gamma_g \quad (\text{pontos nodais livres}). \end{cases}$$

Problema Modelo

Escolhendo $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_I}\}$ como uma base de V_h , então, podemos definir

$$w_h = \sum_{j=1}^{N_I} a_j \phi_j(x, y);$$

$$v_h = \phi_i(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, N_I.$$

Substituindo esses resultados na formulação variacional discreta, obtemos um sistema linear da forma

$$A\mathbf{u} = F,$$

onde

- $A = [A_{ij}]$ é uma matriz $N_I \times N_I$, com

$$A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} (\nabla \phi_i \cdot K \nabla \phi_j + \sigma \phi_i \phi_j) d\Omega$$

Problema Modelo

- $F = [F_i]$ é um vetor com N_I elementos, onde

$$F_i = \int_{\Omega} \phi_i f d\Omega + \int_{\Gamma_h} \phi_i h d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \phi_i \cdot K \nabla G_h + \sigma \phi_i G_h) d\Omega$$

Funções lineares por partes definidas sobre uma malha triangular

Um polinômio nas variáveis x e y tem a forma

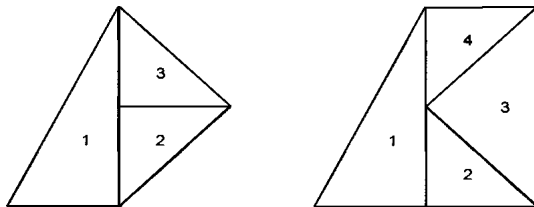
$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots + a_{0n}y^n,$$

onde $a_{00}, a_{10}, \cdots, a_{0n}$ são os coeficientes (constantas).

- Para definir um **polinômio por partes** em Ω , o domínio Ω precisa ser particionado em subdomínios;
- Uma função polinomial por partes é uma função definida por um polinômio em cada subdomínio de Ω ;
- A coleção de subdomínios é chamada de **malha**;
- As malhas bidimensionais mais comuns são **triangulações**: domínio Ω é particionado em *triângulos*.

Funções lineares por partes definidas sobre uma malha triangular

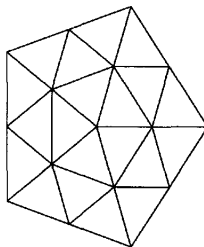
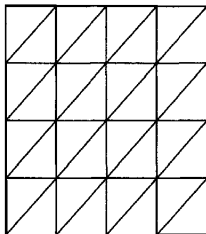
- A interseção de quaisquer dois triângulos é um vértice (comum aos dois triângulos) ou uma aresta (comum aos dois triângulos). Situações como as mostradas nas figuras abaixo são chamadas de triangulações **não-conformes** (e não serão permitidas).



(a) Dois exemplos de triangulações não conformes. Em ambos os casos, a interseção dos triângulos 1 e 2 é um segmento de linha que não é uma aresta do triângulo 1

Funções lineares por partes definidas sobre uma malha triangular

- Se o domínio Ω não é poligonal, é necessário aproximar a fronteira $\partial\Omega$ por segmentos de linhas ou curvas simples (originando "triângulos com arestas curvas"). Assumiremos que Ω seja poligonal, de forma que a triangulação cubra totalmente Ω . A figura abaixo mostra as triangulações de um quadrado e um pentágono.



Um pouco de notação ...

- Um triangulação consiste de N_t triângulos

$$T_1, T_2, \dots, T_{N_t};$$

- Os vértices dos triângulos são

$$z_1, z_2, \dots, z_{N_v},$$

onde $z_j = (x_j, y_j)$ e N_v é o números total de vértices da malha;

- Cada triângulo é associado a três vértices da lista $\{z_1, z_2, \dots, z_{N_v}\}$, que podem ser identificados pelos seus índices na lista:
 - (i) índices dos vértices do triângulo T_i : $n_{i,1}$, $n_{i,2}$ e $n_{i,3}$;
 - (ii) os vértices de T_i são $z_{n_{i,1}}$, $z_{n_{i,2}}$ e $z_{n_{i,3}}$.
- Os índices $n_{i,j}$ relacionam os índices locais ($j = 1, 2, 3$) com o índices globais.

Um pouco de notação ...

- No processo de análise e implementação do MEF, é necessário considerar uma família de triangulações. Cada triangulação é caracterizada pelo seu *tamanho de malha* h (comprimento característico de malha), que é definido como o diâmetro máximo dentre todos os diâmetros dos triângulos que compõem a triangulação. Denotamos uma triangulação por \mathcal{T}_h .

- O espaço de funções mais simples formado por polinômios por partes contínuos em Ω consiste de *funções lineares por partes contínuas* definidas em \mathcal{T}_h .
- Seja p uma função polinomial linear por partes contínua em Ω . Então, a função p restrita a cada $T_i \in \mathcal{T}_h$ é da forma

$$p_i(x) = p(x) |_{T_i} = a_i + b_i x + c_i y,$$

onde a_i , b_i e c_i são determinados (unicamente) através dos valores de $p_i(x)$ nos três vértices de T_i .

- O gráfico de $p_i(x)$ é uma parte de uma plano.

Como a função p é contínua em Ω ,

- se o vértice $z_j \in T_i$ e $z_j \in T_k$,

$$a_i + b_i x_j + c_i y_j = a_k + b_k x_j + c_k y_j.$$

\implies Os $3N_t$ parâmetros (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , \dots , $(a_{N_t}, b_{N_t}, c_{N_t})$ não são todos independentes;

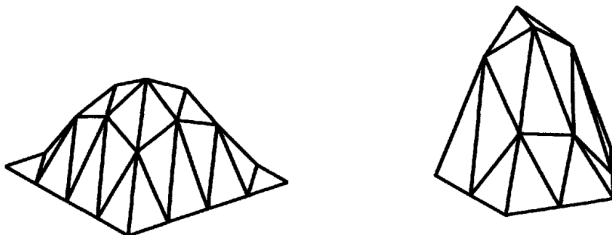
- se a aresta $s \in T_i$ e $s \in T_k$,

$$a_i + b_i x + c_i y = a_k + b_k x + c_k y, \quad \forall (x, y) \in s,$$

pois p é contínua em s .

\implies Basta que $p_i(z_1) = p_k(z_1)$ e $p_i(z_2) = p_k(z_2)$, onde z_1 e z_2 são os vértices extremos da aresta s .

- Se \mathcal{T}_h contém N_V vértices (pontos nodais), então uma função linear por partes em \mathcal{T}_h é determinada pelos N_V valores nodais da função, também chamados de graus de liberdade. A figura abaixo mostra duas funções lineares por partes definidas nas malhas construídas sobre o quadrado e o pentágono.



(c) Duas funções lineares por partes contínuas

- Seja $P_h^{(1)}$ o conjunto de todas as funções lineares por partes contínuas definidas em \mathcal{T}_h .
 $P_h^{(1)}$ é um espaço vetorial de dimensão finita, tal que

$$\dim P_h^{(1)} = N_v.$$

- Cada função $v \in P_h^{(1)}$ pode ser identificada por um vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N_v}$ consistindo dos valores nodais da função v .

Podemos determinar (facilmente) uma base

$$\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_v}\}$$

para o espaço $P_h^{(1)}$ de forma que

- a função $v \in P_h^{(1)}$ pode ser escrita da forma

$$v = \sum_{i=1}^{N_v} a_i \psi_i$$

- Para todo vetor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N_v}) \in \mathbb{R}^{N_v}$,

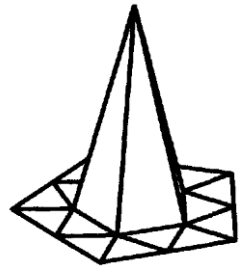
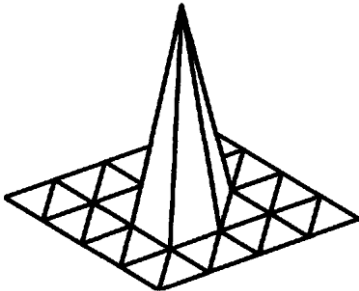
$$\sum_{i=1}^{N_v} a_i \psi_i(x_j, y_j) = v(x_j, y_j) = a_j,$$

isto é,

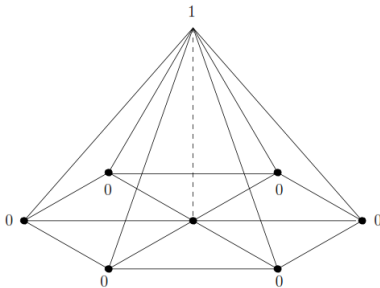
$$\psi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (4)$$

A condição (4) define as funções base ψ_i , $i = 1, 2, \dots, N_v$.
 Uma base satisfazendo (4) é chamada de **base lagrangeana**
 ou **base nodal**.

- Exemplo de funções base ψ_i :



- Exemplo de funções base ψ_i :



- Os pontos nodais de \mathcal{T}_h localizados na fronteira prescrita (Dirichlet) são chamados de *pontos nodais prescritos*. Caso contrário, eles são chamados de *pontos nodais livres*;
- Se os dois pontos extremos da aresta $s \in T_i$ estão na fronteira prescrita (Dirichlet), dizemos que s é uma *aresta prescrita*, caso contrário, s é uma *aresta livre*;
- O número de pontos nodais livres será denotado por N_l e o número de pontos nodais prescritos por N_p ;
- Definimos a sequência l_1, l_2, \dots, l_{N_l} de forma que

$$z_{l_1}, z_{l_2}, \dots, z_{l_{N_l}}$$

são os pontos nodais livres, e outra sequência p_1, p_2, \dots, p_{N_p} de forma que

$$z_{p_1}, z_{p_2}, \dots, z_{p_{N_p}}$$

são os pontos nodais prescritos.

Exemplo

Seja Ω o quadrado unitário dado por

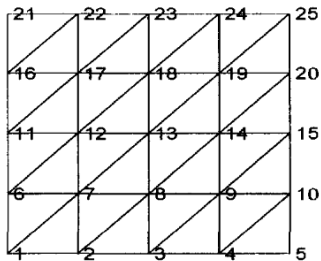
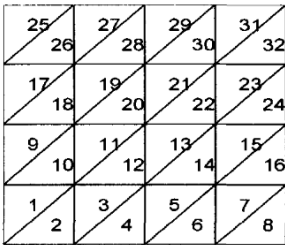
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

tal que $\partial\Omega = \Gamma_g \cup \Gamma_h$, com $\Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset$, onde

- $\Gamma_g = \{(x, y) \mid x \in [0, 1], y = 1\}$ (fronteira superior do quadrado);
- $\Gamma_h = \partial\Omega \setminus \Gamma_g$

Exemplo

A figura abaixo mostra uma malha definida sobre o domínio Ω . O número total de elementos triangulares é $N_t = 32$ e o número total de pontos nodais (vértices) é $N_v = 25$.



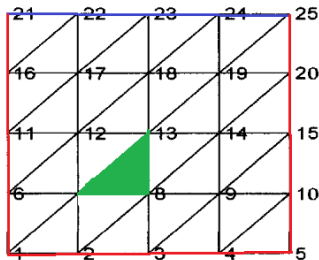
(d) Uma triangulação do quadrado unitário. A figura à esquerda mostra a enumeração dos 32 elementos, enquanto que a figura à direita mostra a enumeração dos 25 pontos nodais

Exemplo

Recordemos que os inteiros $n_{i,1}$, $n_{i,2}$, $n_{i,3}$ são os índices dos três vértices do triângulo (elemento) T_i . A figura mostra que

$$n_{12,1} = 7, \quad n_{12,2} = 8, \quad n_{12,3} = 13.$$

- Os pontos nodais livres são: 1, 2, \dots , 20. $N_l = 20$;
- Os pontos nodais prescritos são: 21, 22, 23, 24 e 25. $N_p = 5$.



- $P_h^{(1)}$ é um subespaço de $H^1(\Omega)$;
- $V_h = \{v \in P_h^{(1)} \mid v = 0 \text{ em } \Gamma_g\}$;
- Uma base para o subespaço V_h é dada por

$$\{\psi_{I_1}, \psi_{I_1}, \dots, \psi_{I_{N_I}}\};$$

Por conveniência, escrevemos $\psi_{I_k} = \phi_k$, de forma que a base para V_h pode ser escrita como

$$\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_I}\}.$$

Matriz Local e Vetor Local

Em cada triângulo (elemento) $T_i \in \mathcal{T}_h$ uma função linear é dada por

$$p_i(x, y) = a + bx + cy, \quad \forall (x, y) \in T_i.$$

Para determinarmos as constantes a , b e c , façamos:

$$v_1 = p_i(x_1, y_1) = a + bx_1 + cy_1$$

$$v_2 = p_i(x_2, y_2) = a + bx_2 + cy_2$$

$$v_3 = p_i(x_3, y_3) = a + bx_3 + cy_3$$

onde (x_j, y_j) , $j = 1, 2, 3$ são as coordenadas dos três vértices do triângulo T_i .

Matriz Local e Vetor Local

Resolvendo esse sistema para a , b e c , obtemos

$$a = \frac{1}{2A^e} \left[v_1(x_2y_3 - x_3y_2) + v_2(x_3y_1 - x_1y_3) + v_3(x_1y_2 - x_2y_1) \right];$$

$$b = \frac{1}{2A^e} \left[v_1(y_2 - y_3) + v_2(y_3 - y_1) + v_3(y_1 - y_2) \right];$$

$$c = \frac{1}{2A^e} \left[v_1(x_3 - x_2) + v_2(x_1 - x_3) + v_3(x_2 - x_1) \right]$$

onde A^e , é a área do elemento (triângulo) T_i , dada por

$$2A^e = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2) \right]$$

Matriz Local e Vetor Local

Eliminando a , b e c , obtemos

$$p_i(x, y) = v_1 \phi_1^e(x, y) + v_2 \phi_2^e(x, y) + v_3 \phi_3^e(x, y),$$

onde

$$\phi_1^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} \left[(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_1)x + (x_3 - x_2)y \right];$$

$$\phi_2^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} \left[(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y \right];$$

$$\phi_3^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} \left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y \right]$$

são as funções de forma local associadas aos três vértices (pontos nodais) do triângulo T_i .

Matriz Local e Vetor Local

As funções de forma pode ser escritas como

$$\phi_1^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} [a_1 + b_1x + c_1y];$$

$$\phi_2^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} [a_2 + b_2x + c_2y];$$

$$\phi_3^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} [a_3 + b_3x + c_3y],$$

onde

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \quad b_1 = y_2 - y_1 \quad c_1 = x_3 - x_2;$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3;$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1.$$

Problema Local

Problema Local

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int_T \nabla v_h \cdot K \nabla w_h d\Omega}_{\text{Termo Difusivo}} + \underbrace{\int_T b v_h w_h d\Omega}_{\text{Termo Reativo}} &= \underbrace{\int_T v_h f d\Omega}_{\text{Termo de Fonte}} \\
 &+ \underbrace{\int_{\Gamma_h} v_h h d\Gamma}_{\text{C. C. Neumann}} \\
 &- \underbrace{\int_T \nabla v_h \cdot K \nabla G_h d\Omega}_{\text{C. C. Dirichlet}} \\
 &- \underbrace{\int_T b v_h G_h d\Omega}_{\text{C. C. Dirichlet}} .
 \end{aligned}$$

Problema Local

As matrizes e vetores locais podem ser calculados através das seguintes integrais:

$$\int_T (\phi_1)^m (\phi_2)^n (\phi_3)^r d\Omega = \frac{m!n!r!}{(m+n+r+2)!} 2A^e$$

e

$$\int_{\Gamma^e} (\phi_1)^m (\phi_2)^n d\Gamma = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \Gamma^e,$$

onde A^e é a área de um elemento triangular e Γ^e é o comprimento de uma aresta do triângulo.

Matriz Local - Termo Difusivo

Matriz Local do Termo Difusivo é dada por

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix},$$

onde

$$d_{ij} = \int_T \nabla \phi_i^e(x, y) \cdot \nabla \phi_j^e(x, y) d\Omega.$$

$$\nabla \phi_k^e(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_k^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix}$$

Matriz Local - Termo Difusivo

Então,

$$\begin{aligned} \nabla \phi_i^e(x, y) \cdot \nabla \phi_j^e(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{b_i}{2A^e} \\ \frac{c_i}{2A^e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{b_j}{2A^e} \\ \frac{c_j}{2A^e} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4(A^e)^2} (b_i b_j + c_i c_j) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \int_T \nabla \phi_i^e(x, y) \cdot \nabla \phi_j^e(x, y) d\Omega \\ &= \frac{1}{4(A^e)^2} (b_i b_j + c_i c_j) \underbrace{\int_T d\Omega}_{=A^e} \\ &= \frac{1}{4A^e} (b_i b_j + c_i c_j). \end{aligned}$$

Matriz Local - Termo Difusivo

$$d_{11} = \frac{1}{4A^e} \left[(y_2 - y_1)(y_2 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_3 - x_2) \right];$$

$$d_{12} = \frac{1}{4A^e} \left[(y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \right];$$

$$d_{13} = \frac{1}{4A^e} \left[(y_2 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \right];$$

$$d_{21} = \frac{1}{4A^e} \left[(y_3 - y_1)(y_2 - y_1) + (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) \right];$$

$$d_{22} = \frac{1}{4A^e} \left[(y_3 - y_1)(y_3 - y_1) + (x_1 - x_3)(x_1 - x_3) \right];$$

$$d_{23} = \frac{1}{4A^e} \left[(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \right];$$

Matriz Local - Termo Difusivo

$$d_{31} = \frac{1}{4A^e} \left[(y_1 - y_2)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \right];$$

$$d_{32} = \frac{1}{4A^e} \left[(y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) \right];$$

$$d_{33} = \frac{1}{4A^e} \left[(y_1 - y_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_1) \right];$$

Matriz Local - Termo Reativo

Matriz Local do Termo Reativo é dada por

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

onde

$$r_{ij} = \int_T b(x, y) \phi_i^e(x, y) \phi_j^e(x, y) d\Omega.$$

Considerando $b(x, y)$ constante em cada triângulo T , obtemos

$$r_{ij} = b \int_T \phi_i^e(x, y) \phi_j^e(x, y) d\Omega = \begin{cases} \frac{bA^e}{6}, & \text{se } i = j; \\ \frac{bA^e}{12}, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Matriz Local - Termo Reativo

$$R = \frac{bA^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$\frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

proveniente do termo

$$\int_T w_h v_h d\Omega$$

é chamada de **matriz de massa** associada ao elemento (triângulo) T .

Vetor Local

O vetor global F é construído a partir do termo

$$\int_{\Omega} v_h f d\Omega + \int_{\Gamma_h} v_h h d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v_h \cdot K \nabla G_h + b v_h G_h) d\Omega$$

- Em cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$, tem-se um vetor local

$$F^e = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix},$$

onde

$$f_i^e = \int_T \phi_i^e f d\Omega + \int_{\Gamma_h^e} \phi_i^e h d\Gamma - \int_T (\nabla \phi_i^e \cdot K \nabla G_h^e + b \phi_i^e G_h^e) d\Omega,$$

$i = 1, 2, 3.$

Vetor Local

Usando interpolação, podemos aproximar a função f no elemento T da seguinte forma

$$f(x)|_T = f_1\phi_1^e(x, y) + f_2\phi_2^e(x, y) + f_3\phi_3^e(x, y),$$

onde

$$f_i = f(x_i, y_i)$$

é o valor da função f no vértice $z_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ do triângulo T .

Portanto,

$$\int_T \phi_i^e f d\Omega = \left(\int_T \phi_i^e \phi_1^e d\Omega \right) f_1 + \left(\int_T \phi_i^e \phi_2^e d\Omega \right) f_2 + \left(\int_T \phi_i^e \phi_3^e d\Omega \right) f_3.$$

Vetor Local

Isso implica que

$$\int_T w_h f d\Omega = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2f_1 + f_2 + f_3 \\ f_1 + 2f_2 + f_3 \\ f_1 + f_2 + 2f_3 \end{bmatrix},$$

onde $f_i = f(z_i) = f(x_i, y_i)$.

Vetor Local

Usando interpolação, podemos também aproximar a função G_h no elemento T da seguinte forma

$$G_h|_T = g_1\phi_1^e(x, y) + g_2\phi_2^e(x, y) + g_3\phi_3^e(x, y),$$

onde

$$g_i = g(x_i, y_i)$$

é o valor que G_h assume no vértice $z_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ do triângulo T . Se z_i é um vértice livre, então $g_i = 0$

Portanto,

$$\int_T (\nabla w_h \cdot K \nabla G_h + b w_h G_h) d\Omega = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix},$$

Vetor Local

$$\int_T (\nabla w_h \cdot K \nabla G_h + b w_h G_h) d\Omega = \begin{bmatrix} E_{11}g_1 + E_{12}g_2 + E_{13}g_3 \\ E_{21}g_1 + E_{22}g_2 + E_{23}g_3 \\ E_{31}g_1 + E_{32}g_2 + E_{33}g_3 \end{bmatrix},$$

onde

- $E = D + R$ é a matriz do elemento associada a forma bilinear $a(w_h, v_h)$, sendo que D e R são as matrizes locais de difusão e reação, calculadas anteriormente.
- Vale ressaltar que $g_i = G_h(x_i, y_i)$ é diferente de zero apenas se o ponto nodal (x_i, y_i) é um vértice pertencente a fronteira prescrita.

Vetor Local

Vamos calcular o vetor local associado ao termo $\int_{\Gamma_h} v_h h d\Gamma$. Cada componente deste vetor local é da forma

$$h_k = \int_{\Gamma_h^e} \phi_k^e h d\Gamma, \quad k = 1, 2 \text{ ou } k = 2, 3 \text{ ou } k = 1, 3.$$

Se h é constante, então

$$h_k = h \int_{\Gamma_h^e} \phi_k^e d\Gamma = \frac{hl}{2},$$

onde l é o comprimento da aresta Γ_h^e .

Obs: $k = 1, 2$ significa que os pontos extremos da aresta são os vértices locais 1 e 2. A interpretação para $k = 1, 3$ e $k = 2, 3$ é análoga.

Vetor Local

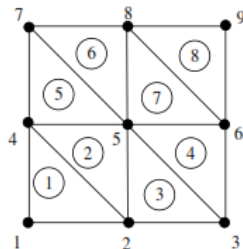
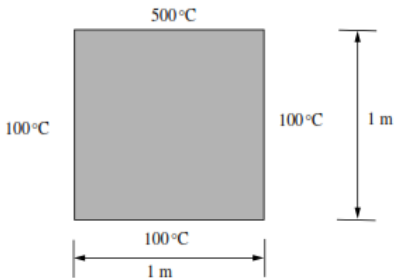
Então

$$F^e = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix} = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2f_1 + f_2 + f_3 \\ f_1 + 2f_2 + f_3 \\ f_1 + f_2 + 2f_3 \end{bmatrix} + \frac{hl}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{11}g_1 + E_{12}g_2 + E_{13}g_3 \\ E_{21}g_1 + E_{22}g_2 + E_{23}g_3 \\ E_{31}g_1 + E_{32}g_2 + E_{33}g_3 \end{bmatrix}$$

Obs: Note que estamos considerando que as arestas da fronteira de Neumann estão associadas aos vértices locais 1 e 2.

Exercício

Problema de Transferência de Calor Bidimensional - Estado Estacionário: considere uma placa plana quadrada mostrada na figura abaixo, junto com a malha de elementos finitos. Se a condutividade térmica é $k = 10W/m^{\circ}C$, determine a distribuição de temperatura usando elementos finitos triangulares lineares.



Implementando o MEF

Em geral, os programas de elementos finitos são divididos em três partes:

- Pre-processamento: geração de malha, estruturas de dados, cálculos relacionados aos elementos;
- Processamento: montagem e solução do sistema $AU = F$;
- Pós-processamento: saída de dados e visualização gráfica da solução.

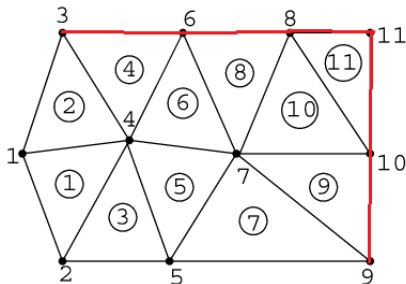
Implementando o MEF

Podemos escrever nosso código de elementos finitos seguindo os seguintes passos:

- Entrada de dados tais como o domínio, a função f , as condições de contorno e os coeficientes da equação.
- Construção da malha \mathcal{T}_h ;
- Montagem da matriz e vetor globais A e F a partir das contribuições das matrizes e vetores locais;
- Solução do sistema linear $AU = F$;
- Saída e visualização dos resultados.

Implementando o MEF

Considere a seguinte malha:



- Essa malha possui 11 elementos e 11 vértices (pontos nodais);
- Os vértices 3, 6, 8, 9, 10 e 11 são prescritos (fronteira em vermelho).

Implementando o MEF

Matriz coordenada **COORD**: é uma matriz de nn linhas e 2 colunas, que associa a cada ponto nodal suas coordenadas x e y .

Implementando o MEF

Vetor ID: é um vetor de tamanho $nnos$, que identifica a equação associada a cada vértice global livre (não prescrito).

$$\mathbf{ID}[i] = \begin{cases} eq, & \text{se } i \text{ é um ponto nodal livre;} \\ 0, & \text{se } i \text{ é um ponto nodal prescrito,} \end{cases}$$

onde eq é o número da equação associada ao nó i .

Para a malha anterior,

$$\mathbf{ID} = [1 \ 2 \ 0 \ 3 \ 4 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

- Os vértices livres (1, 2, 4, 5 e 7) estão associados às equações 1, 2, 3, 4, 5, respectivamente.

Implementando o MEF

Matriz de Conectividade IEN: é uma matriz com nel linhas e 3 colunas que associa cada elemento $e = 1, 2, \dots, nel$ a seus respectivos pontos nodais (vértices) globais.

$$\mathbf{IEN} = \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & z_{1,3} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & z_{2,3} \\ z_{3,1} & z_{3,2} & z_{3,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{nel,1} & z_{nel,2} & z_{nel,3} \end{bmatrix},$$

onde $z_{i,j}$ é o ponto nodal global do elemento T_i associado ao ponto nodal local j .

$$\mathbf{IEN}[\text{elemento}][\text{noLocal}] = \text{noGlobal}.$$

Implementando o MEF

Para a malha anterior,

$$\mathbf{IEN} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 9 & 10 \\ 7 & 10 & 8 \\ 8 & 10 & 11 \end{bmatrix} .$$

Implementando o MEF

Matriz de Localização LM: é uma matriz com nel linhas e 3 colunas. Essa matriz associa os vértices (pontos nodais) locais do elemento ao número da equação correspondente. Para a malha anterior,

$$LM = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Implementando o MEF

A matriz de localização **LM** pode ser construída a partir do vetor **ID** e da matriz **IEN** através da expressão:

$$\mathbf{LM}[elem][noLocal] = \mathbf{ID}[\mathbf{IEN}[elem][noLocal]]$$

Implementando o MEF

Variáveis importantes:

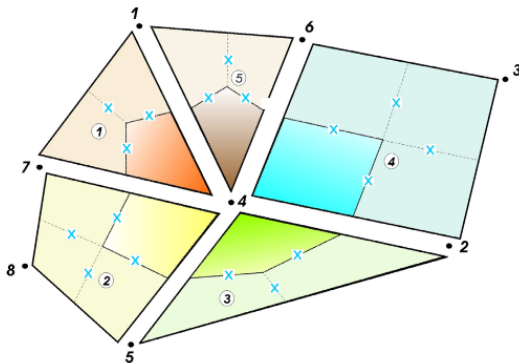
- nel: número de elementos da malha \mathcal{T}_h ;
- neq: número de equações;
- nnos: número de pontos nodais;

Vetores e Matrizes importantes:

- *COORD*, *ID*, *IEN*, *LM*;
- *BOUND*, *BOUNDCOND*: matrizes (ou vetores) associadas aos dados de fronteiras.

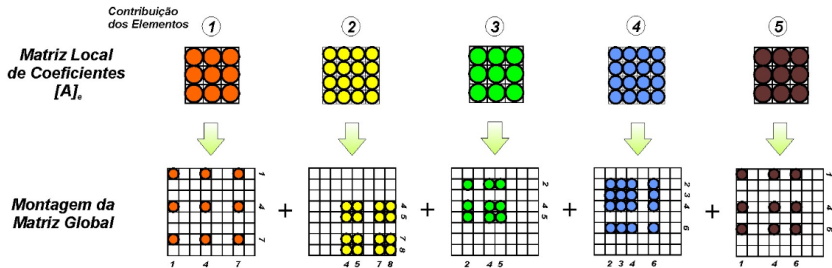
Montagem da matriz global A e do vetor global F

Figura retirada da tese de **Jonas Cordazzo**: *Simulação de reservatórios de petróleo utilizando o método EbFVM e multigrid algébrico*, UFSC, 2006.

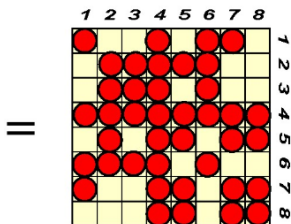


(a) Malha composta por 5 elementos e 8 nós

Montagem da matriz global A e do vetor global F



Montagem da matriz global A e do vetor global F



**Matriz Global
de Coeficientes
[A]**

(b) Processo de formação da matriz global de coeficientes

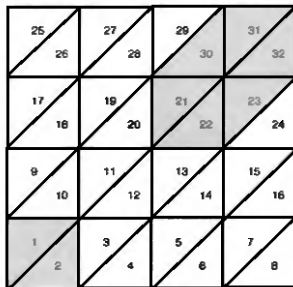
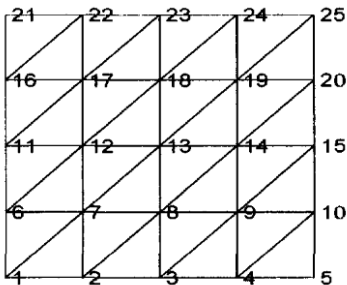
Esparsidade da Matriz Global

- Discutiremos algumas vantagens de usar o espaço $P_h^{(1)}$ (ou um subespaço de $P_h^{(1)}$) como um espaço de aproximação do método de Galerkin;
- Um vantagem é que é fácil trabalhar com funções polinomiais (em particular, as lineares): avaliar, diferenciar e integrar essas funções são tarefas simples.
- Outra vantagem é que quando a base nodal padrão é utilizada, a matriz global é **esparsa**, isto é, possui poucos números não-nulos.

Esparsidade da Matriz Global

Se $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ é uma base para V_h , então a matriz global $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é dada por

$$A = [A_{ij}], \quad \text{onde } A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$



(e) O suporte das funções ϕ_1 e ϕ_{19}

Esparsidade da Matriz Global

- O suporte de ϕ_1 é

$$T_1 \cup T_2$$

e o suporte de ϕ_{19} é

$$T_{21} \cup T_{22} \cup T_{23} \cup T_{30} \cup T_{31} \cup T_{32};$$

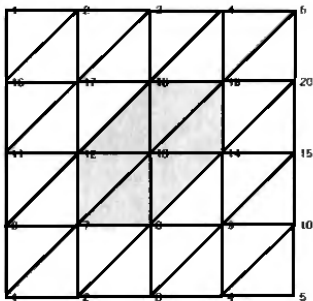
- Como esses suportes são disjuntos, segue-se que $a(\phi_1, \phi_{19}) = 0$ e

$$A_{1,19} = A_{19,1} = 0.$$

- $A_{ij} \neq 0$ somente se a interseção entre os suportes de ϕ_i e ϕ_j é não-vazia. Isso acontece quando i e j são vértices livres (não prescritos) de um mesmo triângulo, caso em que esses pontos nodais são chamados de **adjacentes**.

Esparsidade da Matriz Global

Considere o vértice livre 13 e o suporte de ϕ_{13} mostrados na figura abaixo.



(f) O suporte da função ϕ_{13}

Os únicos pontos nodais livres adjacentes ao vértice 13 são

7 8 12 13 14 18 e 19

Esparsidade da Matriz Global

Supondo que a linha de A associada ao ponto nodal 13 seja a linha 13, então somente os valores

$$A_{13,7}, A_{13,8}, A_{13,12}, A_{13,13}, A_{13,14}, A_{13,18}, A_{13,19}$$

podem ser diferentes de zero.

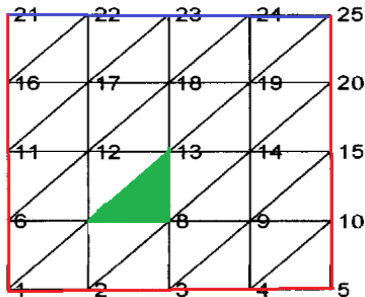
- Nenhuma linha pode ter mais do que 7 valores diferentes de zero.

Esparsidade da Matriz Global

Considerando

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega$$

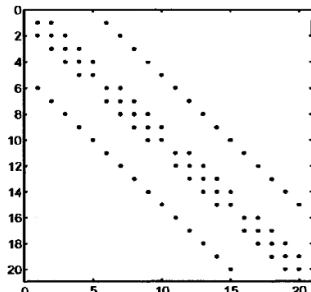
e a malha



(g) Pontos nodais prescritos: 21, 22, 23, 24 e 25.

Esparsidade da Matriz Global

- A matriz A é da ordem de 20×20 , ou seja, possui 400 elementos, sendo que somente 82 são não-nulos (aproximadamente 20%);
- Note que a matriz A possui no máximo, 5 números não-nulos por linha. Isso acontece devido a simetria da malha. Mostre que $A_{13,7} = A_{13,19} = 0$.



Esparsidade da Matriz Global

- Quando uma malha é refinada, o número de vértices adjacentes a um dado vértice não aumenta;
- A esparsidade da matriz global aumenta quando a malha é refinada;
- Refinando a malha anterior de forma que A seja da ordem 72×72 , teríamos 326 valores não-nulos na matriz (aproximadamente 6%), de um total de 5184.