Departamento de Informática, Programa de Pós-Graduação em Informática - UFES/CT
Disciplina: Algoritmos Numéricos II, Computação Científica - 19/1
5º Exercício Computacional - Algoritmos Transientes

Equação do Calor Unidimensional Transiente

Considerar os algoritmos explícitos, implícito e Crank-Nicolson para resolver a equação do calor unidimensional pelo método das diferenças finitas. Desejamos encontrar $u(x,t)$ que satisfaça a equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{1}$$

onde $0 < x < l$, $\kappa > 0$ e $t > 0$. A equação diferencial (1) satisfaz a condições do tipo:

- Condições de Contorno:

$$\begin{array}{rll} u(0) = u_0(t) & u(l) = u_l(t) & ou \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \sigma_0(t) & \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \sigma_l(t) & ou \\ \alpha_0 \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta_0 u(0,t) = \gamma_0(t) & \alpha_l \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta_l u(l,t) = \gamma_l(t) & \end{array}$$

  onde u_0, u_l, σ_0, σ_l, α_0, β_0, α_l, β_l, γ_0 e γ_l são conhecidas.

- Condições Iniciais:
  $u(x,0) = g(x)$ em $(0,l)$

Deseja-se obter a solução $u(x,t)$ no interior de $(0,l)$ para $t \in (0,T)$. Considere uma subdivisão do intervalo $(0,l)$ em $n-1$ subintervalos de tamanho Δx e uma divisão no tempo $t_k = k\Delta t$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Utilize as funções `explicito.m`, `implicito.m` e `cranknicolson.m` para resolver a equação (1). Para cada caso analise qual seria a melhor escolha, considerando tamanho do Δt, acuidade, e tempo computacional.

OBS: Nos testes a seguir é necessário fazer pequenas alterações nas funções disponíveis.

Testes Numéricos

1. Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor nula e

- Parâmetros básicos:
  $\kappa = 0.835\ cm^2/s$, $f(x,t) = 0$ e $(0,l) = (0,10)$
- Condições de contorno e iniciais:
  $u(0,t) = 100^0C$, $u(10,t) = 50^0C$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10)$
- Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:
  - $\Delta x = 1$, $\Delta t_1 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - $\Delta x = 0.1$, $\Delta t_1 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - $\Delta x = 0.01$, $\Delta t_1 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - Para cada valor de Δt observe o comportamento dos 3 métodos de avanço no tempo para um número de passos compatível com o valor de Δx.
- Para uma dada configuração (Δx, Δt e método de avanço no tempo), encontre o tempo t no qual a temperatura atinge o estado estacionário com tolerância de 10^{-3}.

2. Equação do calor com condutividade térmica constante e fonte de calor nula e

   - Parâmetros básicos:
     $a = 0.835\ cm^2/s$, $f(x,t) = 0$ e $(0,l) = (0,10)$.
   - Condições de contorno e iniciais:
     $u(0,t) = 100^0C$, $\frac{\partial u(10,t)}{\partial x} = 0$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10]$
   - Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:
     - $\Delta x = 1$, $\Delta t_1 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
     - $\Delta x = 0.1$, $\Delta t_1 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
     - $\Delta x = 0.01$, $\Delta t_1 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
     - Para cada valor de Δt observe o comportamento dos 3 métodos de avanço no tempo para um número de passos compatível com o valor de Δx.
   - Para uma dada configuração (Δx, Δt e método de avanço no tempo), encontre o tempo t no qual a temperatura atinge o estado estacionário com tolerância de 10^{-3}.

3. Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor unitária e

   - Parâmetros básicos:
     $a(x,t) = 0.835\ cm^2/s$, $f(x,t) = 1$ e $(0,l) = (0,10)$.
   - Condições de contorno e iniciais:
     $u(0,t) = 100^0C$, $\frac{\partial u(10,t)}{\partial x} = 0$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10]$
   - Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:

  - $\Delta x = 1$, $\Delta t_1 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - $\Delta x = 0.1$, $\Delta t_1 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - $\Delta x = 0.01$, $\Delta t_1 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - Para cada valor de Δt observe o comportamento dos 3 métodos de avanço no tempo para um número de passos compatível com o valor de Δx.

- Para uma dada configuração (Δx, Δt e método de avanço no tempo), encontre o tempo t no qual a temperatura atinge o estado estacionário com tolerância de 10^{-3}.

Entregue os arquivos `.m` desenvolvidos e um relatório sucinto com suas conclusões sobre os objetivos listados acima em pdf (nome do arquivo CC191-EXE5-<nome1><nome2>) e via email (luciac@inf.ufes.br) até 28/05/2019. O título do email deve ser CC191-EXE5-<nome1><nome2>. No relatório apresente gráficos da solução para alguns testes, estudo comparativo de tempo computacional e apresente suas conclusões sobre métodos de avanço no tempo para problemas transientes.