Departamento de Informática / Programa de Pós-Graduação em Informática - UFES
34º Exercício Computacional - 19/1
Problemas de Valor no Contorno - 1D
Método das Diferenças Finitas

Introdução

Este exercício visa observar o comportamento do método das diferenças finitas para resolver problemas unidimensionais de valor no contorno considerando condições de contorno de valor prescrito (Condição de Dirichlet), fluxo prescrito (Condição de Neumann) e do tipo mista (Condição de Robin). Considere o problema de valor no contorno (PVC) unidimensional definido por:
Dadas as funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ contínuas em (a, b), encontrar $u(x)$ tal que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = r(x) \qquad a < x < b$$

com condições de contorno do tipo:

$$\begin{aligned} u(a) = u_a \;\; ou \;\; \tfrac{du(a)}{dx} = \sigma_a \;\; ou \;\; \alpha_a\frac{du(a)}{dx} + \beta_a u(a) = \gamma_a \\ u(b) = u_b \;\; ou \;\; \tfrac{du(b)}{dx} = \sigma_b \;\; ou \;\; \alpha_b\frac{du(b)}{dx} + \beta_b u(b) = \gamma_b \end{aligned}$$

onde u_a, u_b, σ_a, σ_b, α_a, β_a, α_b, β_b, γ_a e γ_b são constantes conhecidas do problema.

Considere as funções auxiliares:

- `pvc.m`:
  $[x, u] = pvc(a, b, n, tipo_a, u_a, \sigma_a, \alpha_a, \beta_a, \gamma_a, tipo_b, u_b, \sigma_b, \alpha_b, \beta_b, \gamma_b)$, sendo:
  - n número de incógnitas;
  - $tipo_a$ tipo de condição de contorno em $x = a$ (1: valor prescrito, 2: derivada prescrita, 3: condição mista)
  - $tipo_b$ tipo de condição de contorno em $x = b$ (1: valor prescrito, 2: derivada prescrita, 3: condição mista)
- `funcoes.m`:
  $[p, q, r] = funcoes(a, b, n)$
  definições das funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$

Análise Assintótica do Erro Cometido

O erro cometido pode ser representado por:

$$\begin{aligned} e(x_i) &= u_i - u_{exa}(x_i) \\ \|e\|_\infty &\leq Ch^a \end{aligned}$$

sendo u_i a solução aproximada em x_i, u_{exa} o valor exato em x_i, h o tamanho do subintervalo (x_{i-1}, x_i), C e a constantes que determinam o grau de aproximação da solução aproximada obtida. Em síntese, o erro cometido E pode ser definido como uma função de h, ou seja $E(h) = Ch^a$, portanto:

$$log(E) = log(C) + alog(h) \qquad (1)$$

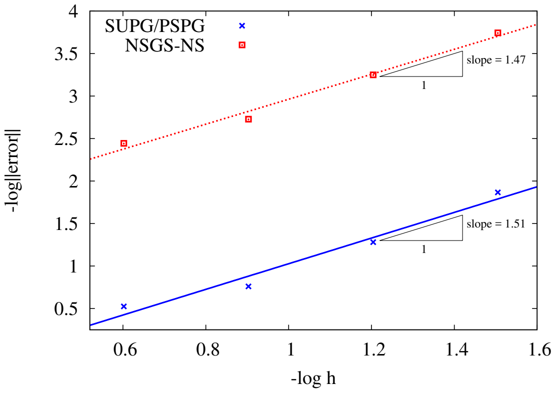

Figura 1: Exemplo de figura para análise assintótica

onde $log(E)$ representa uma reta com inclinação igual a a.

A Fig. representa um exemplo de gráfico que auxilia a análise assintótica do erro cometido – o gráfico da Fig. não representa uma análise para o método das diferanças finitas é apenas um exemplo do tipo de gráfico que deve ser gerado.

Faça um estudo *a posteriori* do erro cometido para os pvc's a seguir considerando:

- 4 tamanhos de discretização adequados;
- Considere as funções `polyfit` e `polival` para encontrar a regressão linear (1) e identificar o fator a.

Sabendo a solução exata do PVC abaixo é $u(x) = x^2 + x - 1$ avalie

$$\begin{aligned}
u'' - \frac{1}{2}u' + u &= x^2 + \frac{1}{2} \text{ para} x \in (0,1) \\
u(0) &= -1 \\
u(1) &= 1 \\
ou & \\
u'(0) &= 1 \\
u(1) &= 1 \\
ou & \\
u(0) &= -1 \\
-u'(1) + 2u(1) &= -1
\end{aligned}$$

- O que podemos dizer sobre a ordem de aproximação desse pvc pelo método das diferenças finitas considerando as aproximações escolhidas?
- Os valores obtidos para a foram os esperados em todos os casos? Caso não tenha sida o que você sugere para melhorar a aproximação?

Aplicações

Conservação de Calor em uma haste longa e fina

A conservação de calor em uma haste longa e fina (conforme Figura), considerando que a haste não esteja isolada e que o sistema esteja em estado estacionário, pode ser modelada pelo PVC:

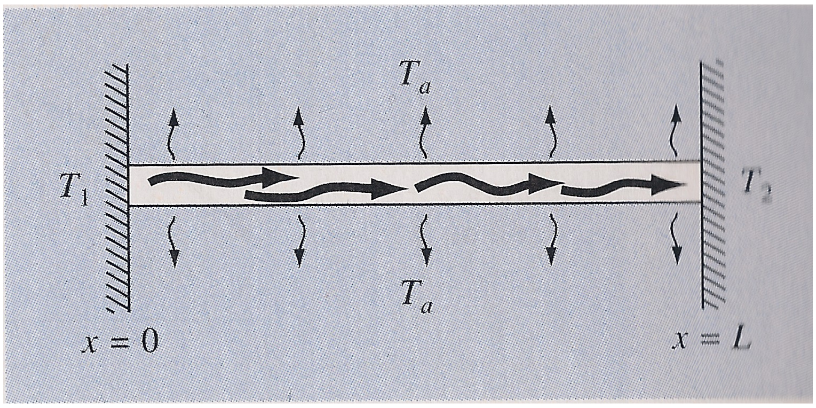

Figura 2: Geometria da haste longa e fina

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2T}{dx^2} + K(T_a - T) &= 0 \text{ em } (0, L) \\
T(0) &= T_1 \\
T(L) &= T_2
\end{aligned}
$$

onde K representa o coeficiente de transferência de calor que paramatriza as taxas de dissipação de calor para o ar (m^{-2}) e T_a é a temperatura do ar em torno da haste (^0C). Considerando $T(0) = 40^0C$, $T(10) = 200^0C$, $K = 0.01\, m^{-2}$ e $T_a = 20\,^0C$, obtenha a distribuição da temperatura no interior do intervalo $(0, 10)$, considerando $n = 10, 50, 100$. Plote os gráfico da solução aproximada para cada n.

Resfriador unidimensional

Considere o problema de resfriar uma massa aquecida como mostra a Fig. . Exemplos podem incluir o resfriamento de chips de computadores ou amplificadores elétricos. O modelo matemático que descreve a transferência de calor na direção unidimensional x é dado pela Equação de transferência de calor (próximo slide). Detalhes sobre a definição do modelo matemático pode ser encontrado em ([1]), disponível na página do curso.

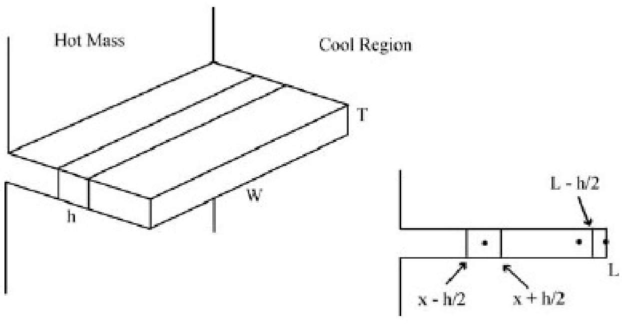

Figura 3: Geometria do Resfriador

[1] R. E. White, *Computational Modeling with Methods and Analysis*, Department of Mathematics, North Carolina State University, 2003

$$-\frac{d}{dx}\left(K\frac{du(x)}{dx}\right) + Cu(x) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

com condições de contorno do tipo:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ c_{ref}u(L) + K\frac{du(L)}{dx} &= c_{ref}u_{ref} \end{aligned}$$

onde K é a condutividade térmica, u_{ref} é uma temperatura de referência, u_0 é a temperatura inicial da massa e c_{ref} é a abilidade da superfície do resfriador de transmitir calor na região. A constante C e o termo fonte f são funções da geometria do resfriador dados por:

$$C \equiv \left(\frac{2W + 2T}{TW}\right)c_{ref} \qquad \text{e} \qquad f \equiv Cu_{ref}$$

onde a temperatura inicial da massa $u_0 = 160$, a temperatura de referência $u_{ref} = 70$, $K = 0.001$, $T = 0.1$, $W = 10$ e $L = 1$. Podemos considerar diferentes possibilidades para o coeficiente c_{ref}, por exemplo, $c_{ref} = 0.0001$, $c_{ref} = 0.001$, $c_{ref} = 0.01$, $c_{ref} = 0.1$.

Considerando $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$ encontre a solução aproximada para os diferentes coeficientes c_{ref}. Para cada caso plote o gráfico da solução aproximada, considerando $n = 50$.

Relatório

Escreva um relatório com suas conclusões sobre os objetivos listados acima. Entregar os fontes `.m` e uma cópia em pdf via email (nome do arquivo CC191-EXE4-<nome1><nome2>) (luciac@inf.ufes.br)até 07/05/2019. O título do email deve ser CC191-EXE4-<nome1><nome2>.