DI/PPGI/UFES
1º Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos II/Computação Científica - 19/1
Sistemas Lineares usando o Octave

Objetivos

- Observar o comportamento dos métodos diretos e iterativos estacionários quanto as características da matriz dos coeficientes.

Conceitos/comandos importantes:

- Uma matriz é dita mal-condicionada se:

$$cond(A) = \|A\|_* \|A^{-1}\|_* \quad \text{for um valor expressivamente elevado}$$

  Comandos do octave:

  - `cond(A)`
  - `norm(x,*)` (obtem a norma $*$ do vetor x - por exemplo, pode ser a norma euclidiana $* = 2$ ou a norma do máximo $* =$ `inf`)

- Os métodos diretos são exatos a menos de erros de ponto flutuante cometidos no processo de transformar o sistema original em um sistema trivial.
  Comando do Octave:

  - `x = A\b` (resolve o sistema linear por Eliminação de Gauss)
  - `r = b - A * x` (calcula o resíduo da solução aproximada encontrada)

- Os métodos diretos são bem eficientes para matrizes de pequeno porte. Entretanto, o processo de solução prevê preenchimento de posições originalmente nulas (fill-in), aumentando assim o número de operações de ponto flutuante.
  Comandos do Octave:

  - `[L,U,P] = lu(A)` (obtem os fatores L, U e P)
  - `spy(A)` (obtem a esparsidade da matriz A)

- Os métodos iterativos dependem de critérios de convergência:

$$x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c \text{ converge } \Leftrightarrow \rho(M) < 1$$

  onde $\rho(M)$ é o maior módulo dos autovalores de M.
  Comandos do Octave:

  - `[MJ,MS,MSOR]=fatora(A,w)` (obtem as matrizes `MJ`, `MS` e `MSOR` de `A`)
  - `[V lambda]=eig(A)` (obtem os autovetores `V` e os autovalores `lambda` de `A`)
  - `max(abs(diag(lambda)))` (obtem o maior valor em módulo dos elementos da diagonal de `lambda`)

- O repositório de matrizes esparsas da *University of Florida/Department of Computer and Information Science and Engineering (CISE)*[1] disponibiliza uma varideade de matrizes esparsas. Um dos formatos disponíveis para as matrizes é <nome>.mtx conforme a figura a seguir:

[1] http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/

```
%%MatrixMarket matrix coordinate real symmetric
112 112 376
1 1  2.9696530325600e+08
4 1  4.5073393728200e+09
5 1 -2.9696530325600e+08
8 1  4.5073393728200e+09
2 2  2.9696530325600e+08
3 2 -4.5073393728200e+09
6 2 -2.9696530325600e+08
7 2 -4.5073393728200e+09
3 3  1.6723964696800e+11
6 3  4.5073393728200e+09
7 3 -3.0414852966400e+10
4 4  1.6723964696800e+11
5 4 -4.5073393728200e+09
8 4 -3.0414852966400e+10
5 5  3.9323795940500e+08
8 5 -4.1381337364900e+09
9 5 -9.6272656149300e+07
12 5  3.6920563633300e+08
6 6  3.9323795940500e+08
7 6  4.1381337364900e+09
10 6 -9.6272656149300e+07
```

Comandos do Octave:

- `A = geramatriz('<nome>.mtx')` (obtem a matriz `A` a partir do arquivo `<nome>.mtx`)
- `[x,iter]=jacobi(A,b,tol,nmaxiter)`
- `[x,iter]=sor(A,b,tol,nmaxiter,w)`
- `plot(x,y)` (plota o grafico dos pontos de $y_i = f(x_i)$)
- `log(x)` (calcula o logarítmo de x)

Conside as matrizes `fs1831.mtx`, `hor131.mtx`, `nrail5177.mtx`, `orsirr1.mtx`, `plat362.mtx` disponíveis no material de apoio. Utilizando as funções disponíveis na página e comandos básicos do Octave resolva os exercícios a seguir.

1. O objetivo deste exercício é observar o comportamento dos métodos diretos para esse conjunto de matrizes. Para cada matriz:

   (a) Recupere a matriz esparsa a partir do arquivo `.mtx` utilizando a função `geramatriz.m`;

   (b) Obtenha os fatores L, U e P utilizando a função `[L,U,P]=lu(A)`;

   (c) Observe a configuração de esparsidade das matrizes A, L e U. O que podemos observar com relação ao preenchimento no processo de decomposição?

   (d) Calcule a solução do sistema linear onde $\mathtt{b} = \mathtt{A} * \mathtt{ones}(\mathtt{n}, 1)$, através de $\mathtt{x} = \mathtt{A} \backslash \mathtt{b}$ e a norma do máximo do resíduo, através de $\mathtt{norm}(\mathtt{b} - \mathtt{A} * \mathtt{x}, \mathtt{inf})$.

   (e) Calcule o número de condicionamento, utlizando a função $\mathtt{cond}(\mathtt{A})$.

   (f) O que podemos dizer sobre a qualidade da solução encontrada?

2. O objetivo desse exercício é observar o comportamento dos métodos iterativos estudados para esse conjunto de matrizes. Para cada matriz:

   (a) Calcule a solução de cada sistema pelos métodos Jacobi, Seidel (função SOR com $w = 1$ e SOR, considerando tolerância $\epsilon = 0.00001$, número máximo de iterações $niter = 10000$ e parâmetro $\omega \in (0, 2)$ (faça algumas escolhas do parâmetro ω com o objetivo de diminuir o número de iterações do método SOR).

   (b) Faça o gráfico do erro relativo com relação as iterações utilizando os dados calculados nas funções `jacobi.m` e `sor.m`. É necessário fazer uma pequena mudança nas funções. No mesmo sistema de eixos plote o gráfico dos 3 métodos: Jacobi, Seidel e SOR(w).

   (c) Avalie o comportamento dos processos iterativos de cada um dos métodos utilizando a função `fatora`.

   (d) Comente suas conclusões sobre o comportamento da matriz para métodos diretos e iterativos.

Relatório

Escreva um relatório suscinto com suas conclusões sobre os objetivos listados acima. Entregar uma cópia em pdf via email (luciac@inf.ufes.br)até 26/03/2019. O título do email dve ser CC191-EXE1-<nome1><nome2>.