Sistemas Lineares
Métodos Diretos (Revisao)
Métodos Iterativos Estacionários (Revisão)

Lucia Catabriga e Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD)
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

Métodos Diretos

1. Introdução
2. Substituição Regressiva
3. Eliminação de Gauss
4. Pivoteamento Parcial
5. Fatoração LU
6. Aplicações
7. Matrizes Esparsas x Métodos Diretos

Introdução

- Encontra a solução exata a menos de erros de ponto flutuante.
- A idéia dos métodos é transformar o sistema em um sistema trivial (sistema triangular).
- A complexidade é em torno de n^3 (número de operações de ponto flutuante).
- Em certos casos, métodos diretos não são eficientes, por exemplo, quando a matriz dos coeficientes é uma matriz esparsa (muitos elementos iguais a zero).

Sistema linear $n \times n$:

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

a_{ij} = coeficientes, b_j = constantes, x_j = variáveis $(i, j = 1, \cdots, n)$
Na forma matricial $Ax = b$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Substituição Regressiva

Sistema triangular superior $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Assuma que o sistema tem solução única: $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, \cdots, n$.

Substituição Regressiva

Sistema triangular superior $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Assuma que o sistema tem solução única: $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, \cdots, n$.

Solução:

$$\begin{aligned} a_{nn} x_n &= b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ a_{n-1,n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n &= b_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}} \end{aligned}$$

$$b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j$$

Algoritmo para a substituição regressiva: $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$

```
Data: A,b,n
Result: x
for i=n,1,-1 do
    soma = b[i];
    for j=i+1,n,1 do
        soma = soma - a[i][j] * x[j];
    end
    x[i] = soma/a[i][i];
end
```

Esforço computacional (№de operações (+,-,x,/) ou flops):

divisão: n

subtração e multiplicação: $2\sum_{j=1}^{n-1} j = 2n(n-1)/2$

total $= n^2$

Idéia do método:

$$Ax = b \quad \Longrightarrow \quad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

operações de linhas elementares

onde $\tilde{A}$ é uma matriz triangular superior.

Idéia do método:

$$Ax = b \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

operações de linhas elementares

onde $\tilde{A}$ é uma matriz triangular superior.

Operações de linhas elementares:

- trocar a ordem de duas equações;
- multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- somar uma equação à outra.

Observação: A eliminação deve ser feita de forma sistemática, ou seja, usando uma sequência de operações elementares de modo a transformar um sistema linear em um outro equivalente, onde a matriz é triangular superior.

Algoritmo para a Eliminação de Gauss:

Passo k: Eliminar os coeficientes da k-ésima coluna abaixo da diagonal ($1 \leq k \leq n-1$)

Operação sobre a Linha i:

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ik} L_k \text{ onde } m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \quad k+1 \leq i \leq n$$

$$\Rightarrow a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}, \quad k+1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k$$

```
Data: A,b,n
Result: x
for k=1,n-1 do
    for i=k+1,n do
        fator = a[i][k] / a[k][k];
        for j=k+1,n do
            a[i][j] = a[i][j] - fator * a[k][j];
        end
        b[i] = b[i] - fator * b[k]
    end
end
```

Esforço computacional:

adição e subtração: $n^3/3 + O(n)$

multiplicação e divisão: $n^3/3 + O(n^2)$

total $= 2n^3/3 + O(n^2)$

Obs: $O(m^n)$ significa “termos de ordem m^n e menores“.

A Ideia Básica da Decomposição LU

Seja $Ax = b$, supor que exista:

- L matriz triangular inferior com $l_{ii} = 1$
- U matriz triangular superior

tal que:

$$A = LU$$

$$LUx = b$$

A Ideia Básica da Decomposição LU

Seja $Ax = b$, supor que exista:

- L matriz triangular inferior com $l_{ii} = 1$
- U matriz triangular superior

tal que:

$$A = LU$$

$$\begin{aligned} LUx &= b \\ Ly &= b \qquad (1) \\ Ux &= y \qquad (2) \end{aligned}$$

A Ideia Básica da Decomposição LU

Seja $Ax = b$, supor que exista:

- L matriz triangular inferior com $l_{ii} = 1$
- U matriz triangular superior

tal que:

$$A = LU$$

$$\begin{aligned} LUx &= b \\ Ly &= b \qquad (1) \\ Ux &= y \qquad (2) \end{aligned}$$

Como encontrar os fatores L e U?
U: matriz resultante da eliminação de Gauss $(a_{ij} = a_{ij} - f_{ik}a_{kk})$
L: multiplicadores $(f_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}})$

$$[A] \rightarrow [L][U]$$

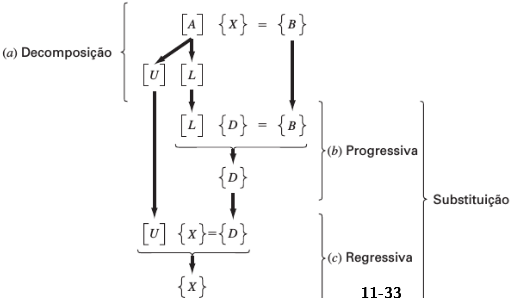
onde

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

e

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{ij} - f_{ik} a_{kk}$$
$$f_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$



11-33

- Processo de Substituição:

$$Ax = b$$

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb$$

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

$$Ux = y$$

- Processo de Substituição:

$$A\,x = b \longrightarrow P A\,x = P\,b \longrightarrow LU\,x = Pb$$

$$U\,x = y, \;\; \text{então} \;\; L\,y = Pb$$

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$
$$Ux = y, \ \text{então} \ Ly = Pb$$

1. $Ly = Pb$, Substituição Progressiva e determino y;

- Processo de Substituição:

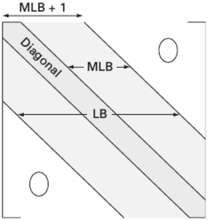
$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$
$$Ux = y, \text{ então } Ly = Pb$$

1. $Ly = Pb$, Substituição Progressiva e determino y;
2. $Ux = y$, Substituição Regressiva e determino a solução x.

Matrizes Esparsas:

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & & & \\ e_2 & f_2 & g_2 & & & \\ & e_3 & f_3 & g_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & e_{n-1} & f_{n-1} & g_{n-1} \\ & & & & e_n & f_n \end{bmatrix}$$

(a) Tridiagonal.

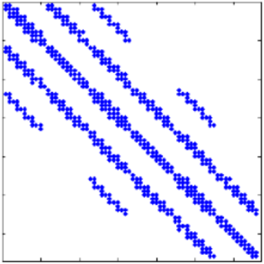


(b) Banda.

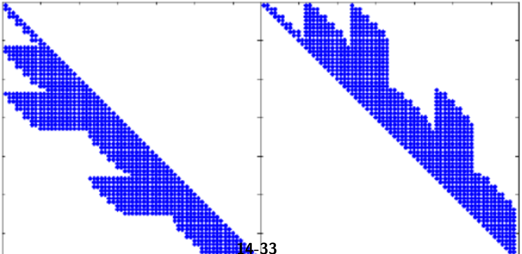
$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\ & b_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\ c_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\ & c_5 & & b_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\ & & c_6 & & b_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\ & & & c_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\ & & & & c_8 & & b_8 & a_8 & b_8 \\ & & & & & c_9 & & b_9 & a_9 \end{bmatrix}$$

(c) Pentadiagonal.

Matrix A: 582 nonzero entries.



$A = LU$: 1950 total nonzero entries.



Esporço Computacional:
Eliminação Progressiva: $2n^3/3 + O(n^2)$
Substituição Regressiva: n^2

n	Elim.	Subst.	Flops	$2n^3/3$	% Elim.
10	705	100	805	667	87.58%
100	671550	10000	681550	666667	98.53%
1000	6.67×10^8	1×10^6	6.68×10^8	6.67×10^8	99.85%

- O tempo de computação cresce bastante à medida que o sistema fica maior. A quantidade de flops cresce quase três ordens de grandeza para cada aumento na ordem de grandeza da dimensão;
- A maior parte do esforço vem da parte da eliminação. Esforços para melhorar o algoritmo devem se concentrar neste passo.

Métodos Iterativos

1. Idéia dos métodos
2. Método de Gauss-Jacobi
3. Método de Gauss-Seidel
4. Convergência dos métodos
5. Método SOR

Introdução

- Encontra uma solução aproximada com precisão pré-fixada.
- O objetivo é transformar o sistema $Ax = b$ em uma expressão recursiva tal que $x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c$ para uma condição inicial $x^{(0)}$ conhecida.
- Depende de critérios de convergência relacionados a matriz de iteração M.
- A complexidade, por iteração, é em torno de n^2 (número de operações de ponto flutuante).
- Quando a matriz dos coeficientes é esparsa, somente os coeficientes não nulos necessitam ser armazenados.

Ideias Gerais

$$A\,x = b \tag{3}$$

Isolar x, reescrevendo o sistema (3) da seguinte forma:

$$x = M\,x + c \tag{4}$$

onde

$$\begin{aligned} M &= \text{matriz } n \times n \\ c &= \text{vetor } n \times 1 \end{aligned}$$

Defina o processo iterativo com $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c \tag{5}$$

Defina o processo iterativo com $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$x^{(k+1)} = M\, x^{(k)} + c \tag{5}$$

Dado $x^{(0)}$, usar (5) para calcular

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= M\, x^{(0)} + c \\ x^{(2)} &= M\, x^{(1)} + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

Defina o processo iterativo com $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$x^{(k+1)} = M\, x^{(k)} + c \tag{5}$$

Dado $x^{(0)}$, usar (5) para calcular

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= M\, x^{(0)} + c \\ x^{(2)} &= M\, x^{(1)} + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

até que $e_{rel} = \frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty}{||x^{(k+1)}||_\infty} < \epsilon$ ou $k \geq k_{max}$ (critério de parada)
onde

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{tolerância dada} \\ k_{max} &= \text{número máximo de iterações dado} \\ ||x||_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{(norma do máximo)} \end{aligned}$$

Outro critério de parada: $||r|| = ||b - Ax^{(k+1)}|| < \epsilon$, Seja A um sistema $n \times n$

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

onde estamos assumindo que $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

Seja A um sistema $n \times n$

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

onde estamos assumindo que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

$$
\begin{array}{l}
\Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} \left[b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \right] \\
\Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{a_{22}} \left[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \right] \\
\vdots
\end{array}
$$

Método de Gauss-Jacobi

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right]
\end{aligned}
$$

Para $k \geq 0$,

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \qquad i = 1, 2, \cdots, n
$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\,x &= (E + D + F)\,x = b \\ \Rightarrow D\,x &= -(E + F)\,x + b \\ \Rightarrow D\,x^{(k+1)} &= -(E + F)\,x^{(k)} + b \end{aligned}$$

Gauss-Jacobi:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= -D^{-1}(E + F)\,x^{(k)} + D^{-1}b \\ &= M\,x^{(k)} + c \end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})\right] \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)})\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})\right]
\end{aligned}
$$

Para $k \geq 0$,

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n
$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\,x &= (E + D + F)\,x = b \\ \Rightarrow (E + D)\,x &= -F\,x + b \\ \Rightarrow (E + D)\,x^{(k+1)} &= -F\,x^{(k)} + b \end{aligned}$$

Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= -(E + D)^{-1} F\,x^{(k)} + (E + D)^{-1}\,b \\ &= M\,x^{(k)} + c \end{aligned}$$

A convergência da sequência gerada pelo método iterativo estacionário, $x^{k+1} = M\,x^k + c$, é dada pelo Teorema 1, onde são fornecidas condições necessárias e suficientes de convergência.

Teorema 1: O método iterativo $x^{k+1} = M\,x^k + c$ converge com qualquer x^0 se, e somente se, $\rho(M) < 1$, sendo $\rho(M)$ o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração M.

Observações:

- A taxa de convergência será controlada pela magnitude do raio espectral. Quanto menor o raio espectral, mais rápida a convergência.
- A determinação do raio espectral da matriz de iteração $\rho(M)$ pode requerer maior esforço computacional que a própria solução do sistema $Ax = b$.

Teorema 2 (Critério das Linhas): É condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A seja diagonalmente dominante, ou seja,

$$\alpha_i = \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\Big)/|a_{ii}| < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Teorema 3 (Critério de Sassenfeld): É condição suficiente para a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A satisfaça

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 < 1 \\ \beta_i &= \frac{\left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right]}{|a_{ii}|} < 1, \qquad i = 2, 3, \cdots, n \end{aligned}$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$Ax = b \qquad \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned} Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\ & (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \end{aligned}$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$
\begin{aligned}
Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b
\end{aligned}
$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned} Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D+E+F)x = \omega b \\ & (D-D)x + \omega(D+E+F)x = \omega b \\ & (D+\omega E)x = [(1-\omega)D - \omega F]x + \omega b \end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$(D+\omega E)x^{(k+1)} = [(1-\omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned}
Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b
\end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$\begin{aligned}
&(D + \omega E)x^{(k+1)} = [(1 - \omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\
&Dx^{(k+1)} = \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)Dx^{(k)}
\end{aligned}$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned} Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\ & (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \\ & (D + \omega E)x = [(1-\omega)D - \omega F]x + \omega b \end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$\begin{aligned} & (D + \omega E)x^{(k+1)} = [(1-\omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\ & Dx^{(k+1)} = \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1-\omega)Dx^{(k)} \\ & \Rightarrow x^{(k+1)} = \omega D^{-1}(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1-\omega)x^{(k)} \end{aligned}$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned} Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\ & (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \\ & (D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b \end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$\begin{aligned} & (D + \omega E)x^{(k+1)} = [(1 - \omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\ & Dx^{(k+1)} = \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)Dx^{(k)} \\ & \Rightarrow x^{(k+1)} = \omega D^{-1}(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)x^{(k)} \end{aligned}$$

Observação: Para $\omega = 1$, temos o método de Gauss-Seidel:

$$x^{(k+1)} = -(E + D)^{-1} F\, x^{(k)} + (E + D)^{-1}\, b \tag{6}$$

Armazenamento de Matrizes Stencil

$$\begin{bmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a & b \\ & & & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - bu_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n - bu_{n+1} \end{bmatrix}$$

A é tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ b & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\ d_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\ & d_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\ e_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\ & e_5 & & d_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\ & & e_6 & & d_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\ & & & e_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\ & & & & e_8 & & d_8 & a_8 & b_8 \\ & & & & & e_9 & & d_9 & a_9 \end{bmatrix} \Rightarrow AA = \begin{bmatrix} & & a_1 & b_1 & c_1 \\ & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ & d_3 & a_3 & 0 & c_3 \\ e_4 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 \\ e_5 & d_5 & a_5 & b_5 & c_5 \\ e_6 & d_6 & a_6 & 0 & c_6 \\ e_7 & 0 & a_7 & b_7 & \\ e_8 & d_8 & a_8 & b_8 & \\ e_9 & d_9 & a_9 & & \end{bmatrix}$$

A é Pentadiagonal

Armazenamento de Matrizes Esparsas - Formato CSR:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

AA	1	1	5	3	4	6	7	8	9	3	6	2	5
JA	1	2	3	1	2	1	3	4	5	3	4	3	5
IA	1	4	6	10	12	14							

- n - ordem de A
- nnz - número de coeficientes não nulos
- $2nnz + n + 1$ - número de alocações para armazenar A
- $AA(k) = a_{ij}, JA(k) = j, IA(i) \leq k < IA(i+1)$

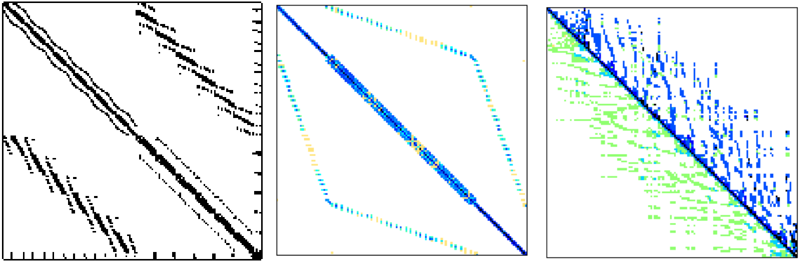
- Uma matriz é dita ser mal-condicionada, quando pequenas alterações nos seus coeficientes ocasionam grandes mudanças na solução do sistema linear associado.
- Uma matriz é dita mal-condicionada se:

  $cond(A) = \|A\|_* \|A^{-1}\|_*$ for expressivamente um valor elevado

- Como os erros dos métodos diretos são provenientes de arredondamento (ou ponto flutuante), para matrizes mal-condicionadas os erros de arredondamento tendem a ser muito grandes.

Repositórios de matrizes Esparsas *Market Matrix* [1] e *CISE* [2]

- Disponibilizam matrizes esparsas oriundas das mais variadas áreas para apoio a estudos de avaliação de matrizes esparsas em geral.
- Exemplos de matrizes depositadas nos repositórios:



(a)hor__131, n = 434, nnz = 4710 (b)FEM_3D_THERMAL1, n = 17880, nnz = 430740 (c) cage13, n = 445315, nnz= 7479343

[1] http://math.nist.gov/MatrixMarket/
[2] http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/

- Um dos formatos indicados para as matrizes é <nome>.mtx

```
%%MatrixMarket matrix coordinate real symmetric
112 112 376
1 1  2.9696530325600e+08
4 1  4.5073393728200e+09
5 1 -2.9696530325600e+08
8 1  4.5073393728200e+09
2 2  2.9696530325600e+08
3 2 -4.5073393728200e+09
6 2 -2.9696530325600e+08
7 2 -4.5073393728200e+09
3 3  1.6723964696800e+11
6 3  4.5073393728200e+09
7 3 -3.0414852966400e+10
4 4  1.6723964696800e+11
5 4 -4.5073393728200e+09
8 4 -3.0414852966400e+10
5 5  3.9323795940500e+08
8 5 -4.1381337364900e+09
9 5 -9.6272656149300e+07
12 5  3.6920563633300e+08
6 6  3.9323795940500e+08
7 6  4.1381337364900e+09
10 6 -9.6272656149300e+07
```

- Todas as informações das matrizes podem ser obtidas navegando nas páginas de cada matriz.
- os coeficientes não nulos estão listados coluna a coluna.

Bibliografia Básica

[1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.