Problemas de Valor Inicial (PVI)

Lucia Catabriga

luciac@inf.ufes.br

May 23, 2019

Dadas as funções $p(x,t)$, $q(x,t)$ e $r(x,t)$ contínuas em $(a,b) \times (0,t_f)$, encontrar $u(x,t)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,t)u = r(x,t) \quad \text{para } x \in (a,b)\times(0,t_f)$$

com condições iniciais:

$$u(x,0) = u_0(x), \text{ para } x \in (a,b)$$

e condições de contorno do tipo:

$$\begin{aligned} u(a,t) = u_a(a,t) \text{ ou } \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = \sigma_a(t) \text{ ou } \alpha_a \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} + \beta_a u(a,t) &= \gamma_a(t) \\ u(b,t) = u_b(b,t) \text{ ou } \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} = \sigma_b(t) \text{ ou } \alpha_b \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} + \beta_b u(b,t) &= \gamma_b(t) \end{aligned}$$

onde u_a, u_b, σ_a, σ_b, α_a, β_a, α_b, β_b, γ_a e γ_b são funções de t conhecidas do problema.

Discretização do Domínio Físico:

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{(b-a)}{(n-1)} \\
x_i &= a + (i-1)h, \text{ sendo } a = x_1, b = x_n \text{ e } n \text{ número de incógnitas}
\end{aligned}
$$

Discretização do Domínio Temporal:

$$
\begin{aligned}
\Delta t & \qquad \text{(passo de tempo)} \\
t_k &= k\Delta t
\end{aligned}
$$

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

$$0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1} < \cdots < t_f$$

Objetivo:

obter aproximações $u_i^k \approx u(x_i, t_k) \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n$ e $k > 0$.

Aproximação das derivadas por Diferenças finitas no domínio espacial:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_k) &\approx \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h}, \quad \theta(h) \text{ (Diferença Adiantada)} \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_k) &\approx \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h}, \quad \theta(h) \text{ (Diferença Atrasada)} \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_t) &\approx \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h}, \quad \theta(h^2) \text{ (Diferença Central)} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) &\approx \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2}, \quad \theta(h^2)
\end{aligned}
$$

Aproximação das derivadas por Diferenças finitas no domínio temporal:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) &\approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}, \quad \theta(\Delta t) \text{ (Diferença Adiantada)} \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+1}) &\approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}, \quad \theta(\Delta t) \text{ (Diferença Atrasada)} \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+1/2}) &\approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}, \quad \theta(\Delta t^2) \text{ (Diferença Central)}
\end{aligned}
$$

Aplicando diferença adiantada na derivada temporal $\Rightarrow$ Método Explícito:

$$\left(\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\Delta t}\right)-\left(\frac{u_{i-1}^k-2u_i^k+u_{i+1}^k}{h^2}\right)+p_i^k\left(\frac{u_{i+1}^k-u_{i-1}^k}{2h}\right)+q_i^k u_i^k=r_i^k$$

$$u_i^{k+1}=-\Delta t\ b_i^k u_{i-1}^k+(1-\Delta t\ a_i^k)u_i^k-\Delta t\ c_i^k u_{i+1}^k+\Delta t\ r_i^k \quad \forall i=1,\ldots,n$$

onde:

$$a_i^k=q_i^k-(2/h^2) \quad b_i^k=(1/h^2)-p_i^k/(2h) \quad c_i^k=(1/h^2)+p_i^k/(2h)$$

$$u^{k+1}=\begin{bmatrix} u_1^{k+1}\\ u_2^{k+1}\\ \vdots\\ u_i^{k+1}\\ \vdots\\ u_{n-1}^{k+1}\\ u_n^{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{c}_1 & & & & & \\ \tilde{b}_2 & \tilde{a}_2 & \tilde{c}_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \tilde{b}_i & \tilde{a}_i & \tilde{c}_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \tilde{b}_{n-1} & \tilde{a}_{n-1} & \tilde{c}_{n-1}\\ & & & & & \tilde{b}_n & \tilde{a}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^k\\ u_2^k\\ \vdots\\ u_i\\ \vdots\\ u_{n-1}^k\\ u_n^k\end{bmatrix}+\Delta t\begin{bmatrix} r_1^k\\ r_2^k\\ \vdots\\ r_i^k\\ \vdots\\ r_{n-1}^k\\ r_n^k\end{bmatrix}$$

sendo: $\tilde{a}_i^k=1-\Delta t a_i^k$, $\tilde{b}_i^k=-\Delta t b_i^k$ e $\tilde{c}_i^k=-\Delta t c_i^k$

Aplicando diferença atrasada na derivada temporal $\Rightarrow$ Método Implícito:

$$\left(\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\Delta t}\right)-\left(\frac{u_{i-1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i+1}^{k+1}}{h^2}\right)+p_i^{k+1}\left(\frac{u_{i+1}^{k+1}-u_{i-1}^{k+1}}{2h}\right)+q_i^{k+1}u_i^{k+1}=r_i^{k+1}$$

$$-\Delta t\ b_i^k u_{i-1}^{k+1}+(1-\Delta t\ a_i^k)u_i^{k+1}-\Delta t c_i^k u_{i+1}^{k+1}=u_i^k+\Delta t\ r_i^{k+1}\qquad \forall i=1,\ldots,n$$

onde:

$$a_i^k=q_i^{k+1}-(2/h^2)\quad b_i^k=(1/h^2)-p_i^{k+1}/(2h)\quad c_i^k=(1/h^2)+p_i^{k+1}/(2h)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{c}_1 & & & & & \\ \tilde{b}_2 & \tilde{a}_2 & \tilde{c}_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \tilde{b}_i & \tilde{a}_i & \tilde{c}_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \tilde{b}_{n-1} & \tilde{a}_{n-1} & \tilde{c}_{n-1} \\ & & & & & \tilde{b}_n & \tilde{a}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_i^{k+1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{k+1} \\ u_n^{k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_i^k \\ \vdots \\ u_{n-1}^k \\ u_n^k \end{bmatrix}+\Delta t\begin{bmatrix} r_1^k \\ r_2^k \\ \vdots \\ r_i^k \\ \vdots \\ r_{n-1}^k \\ r_n^k \end{bmatrix}$$

sendo: $\tilde{a}_i^k=1-\Delta t a_i^k$, $\tilde{b}_i^k=-\Delta t b_i^k$ e $\tilde{c}_i^k=-\Delta t c_i^k$

Aplicando diferença central na derivada temporal ⇒ Método Crank-Nicolson:

$$\left(\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\Delta t}\right)-\left(\frac{u_{i-1}^{k+1/2}-2u_i^{k+1/2}+u_{i+1}^{k+1/2}}{h^2}\right)+p_i^{k+1/2}\left(\frac{u_{i+1}^{k+1/2}-u_{i-1}^{k+1/2}}{2h}\right)+q_i^{k+1/2}u_i^{k+1/2} = r_i^{k+1/2}$$

$$\left(\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\Delta t}\right)+\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{u_{i-1}^{k}-2u_i^{k}+u_{i+1}^{k}}{h^2}\right)+p_i^{k}\left(\frac{u_{i+1}^{k}-u_{i-1}^{k}}{2h}\right)+q_i^{k}u_i^{k}\right] +$$
$$\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{u_{i-1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i+1}^{k+1}}{h^2}\right)+p_i^{k+1}\left(\frac{u_{i+1}^{k+1}-u_{i-1}^{k+1}}{2h}\right)+q_i^{k+1}u_i^{k+1}\right] = \frac{1}{2}\left[r_i^k+r_i^{k+1}\right]$$

onde:

$$\begin{aligned} u_*^{k+1/2} &= \frac{1}{2}\left(u_*^{i-1}+u_*^{i+1}\right) \\ r_i^{k+1/2} &= \frac{1}{2}\left[r_i^k+r_i^{k+1}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{bmatrix}
\tilde{a}_1 & \tilde{c}_1 & & & & & & \\
\tilde{b}_2 & \tilde{a}_2 & \tilde{c}_2 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & \tilde{b}_i & \tilde{a}_i & \tilde{c}_i & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & \tilde{b}_{n-1} & \tilde{a}_{n-1} & \tilde{c}_{n-1} \\
 & & & & & \tilde{b}_n & \tilde{a}_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_i^{k+1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{k+1} \\ u_n^{k+1}
\end{bmatrix}
=
$$

$$
\begin{bmatrix}
\bar{a}_1 & \bar{c}_1 & & & & & & \\
\bar{b}_2 & \bar{a}_2 & \bar{c}_2 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & \bar{b}_i & \bar{a}_i & \bar{c}_i & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & \bar{b}_{n-1} & \bar{a}_{n-1} & \tilde{c}_{n-1} \\
 & & & & & \bar{b}_n & \bar{a}_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1^{k} \\ u_2^{k} \\ \vdots \\ u_i^{k} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{k} \\ u_n^{k}
\end{bmatrix}
+ 0.5\Delta t
\begin{bmatrix}
r_1^k + r_1^{k+1} \\ r_2^k + r_2^{k+1} \\ \vdots \\ r_i^k + r_i^{k+1} \\ \vdots \\ r_{n-1}^k + r_{n-1}^{k+1} \\ r_n^k + r_n^{k+1}
\end{bmatrix}
$$

$$\tilde{a}_i = 1 - 0.5\Delta t a_i^k \quad \tilde{b}_i = -0.5\Delta t b_i^k \quad \tilde{c}_i = -0.5\Delta t c_i^k$$

$$\bar{a}_i = 1 + 0.5\Delta t a_i^k \quad \bar{b}_i = 0.5\Delta t b_i^k \quad \bar{c}_i = 0.5\Delta t c_i^k$$

Consistência, Convergência e Estabilidade de Equações Diferenciais

- A solução aproximada representa a solução exata da equação diferencial?
- Quando e sob que condições as soluções dos sistemas lineares resultantes discretos representam a solução exata da equação diferencial?

$\Rightarrow$ Depende da **Consistência** das aproximações de diferenças finitas e da **Estabilidade** e **Convergência** do método numérico empregado.

Consistência

- Quanto menor Δx melhor a aproximação para as derivadas de uma função u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

  ou seja, o **erro de truncamento local** $\Theta(\Delta x) \to 0$

- Para que uma discretização seja **consistente** com a equação diferencial parcial, seu **erro de truncamento local** deve tender a zero quando $\Delta x, \Delta t \to 0$

Consistência em um exemplo - Equação de Calor 1D:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u_i^{k+1} &= u_i^k + a\Delta t\left(\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2}\right)\end{aligned}$$

Expandindo em série de Taylor os termos u_{i+1}^k, u_{i-1}^k e u_i^{k+1} em torno do ponto (x_i, t_k):

$$\begin{aligned}u_{i\pm1}^k &= u_i^k \pm (\Delta x)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i^k + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^k \pm \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_i^k + \Theta(\Delta x)^4\\ u_i^{k+1} &= u_i^k + (\Delta t)\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_i^k + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_i^k + \Theta(\Delta t)^3\end{aligned}$$

$$\underbrace{\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_i^k = a\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^k}_{\text{EDP}} - \underbrace{\left(\frac{\Delta t}{2!}\right)\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_i^k + \Theta((\Delta t)^2, (\Delta x)^2)}_{\text{Erro Local de Truncamento } \to 0 \text{ para } \Delta x, \Delta t \to 0}$$

$\Rightarrow$ Aproximação consistente

Convergência

- Quando a solução numérica no domínio de interesse u_i^k se aproxima da solução exata $u(x_i, t^k)$ da equação diferencial se $\Delta x, \Delta t \to 0$ dizemos que o método numérico é **convergente**.
- **consistência** é uma condição necessária para a **convergência**
- Podemos dizer que:
  consistência $+$ **estabilidade** $\longrightarrow$ **convergência**
- O que é **estabilidade**?

Estabilidade

- Um método numérico é **estável** se quaisquer erros ou pertubações na solução não são amplificados sem limite.
- O conceito de **estabilidade** está relacionado ao crescimento, ou diminuição dos erros introduzidos nos cálculos.
- O acúmulo dos erros pode ser evitado se seguirmos os **critérios de estabilidade** dos métodos numéricos, isto é, condições que garantam que o método numérico seja estável.
- Normalmente para problemas transientes as condições de estabilidade estabelecem limite superior para o valor de Δt em função de valores de Δx (ou Δy e Δz se problemas multidimensionais), além de coeficientes físicos como condutividade térmica, velocidade de propagação, entre outros.

Estabilidade - Em um exemplo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \kappa \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2}$$

Critério de estabilidade do método explícito:[1]

$$\lambda = \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$$

Os métodos Implícito e Crank-Nicolson são incondicionalmente estáveis.

[1] Fortuna, A.O., Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos - Conceitos Básicos e Aplicações, 2000.

Aplicação - Problema Parabólico - Equação do Calor Transiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

onde $0 < x < l$, $\kappa > 0$ e $t > 0$, sendo:

- Condições de Contorno:

$$\begin{array}{rlr} u(0) = u_0(t) & u(l) = u_l(t) & ou \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \sigma_0(t) & \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \sigma_l(t) & ou \\ \alpha_0 \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta_0 u(0,t) = \gamma_0(t) & \alpha_l \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta_l u(l,t) = \gamma_l(t) & \end{array}$$

  onde u_0, u_l, σ_0, σ_l, α_0, β_0, α_l, β_l, γ_0 e γ_l são conhecidas.

- Condições Iniciais:
  $u(x,0) = g(x)$ em $(0,l)$

Experimento 1: Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor nula e valor prescrito

- Parâmetros básicos:
  $\kappa = 0.835 cm^2/s$, $f(x,t) = 0$ e $(0,l) = (0,10)$
- Condições de contorno e iniciais:
  $u(0,t) = 100^0 C$, $u(10,t) = 50^0 C$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10)$
- Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:
  - $h = 1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{h^2}{2\kappa}$
  - $h = 0.1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{h^2}{2\kappa}$
  - $h = 0.01$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{h^2}{2\kappa}$
  - Para cada valor de Δt observe o comportamento dos 3 métodos de avanço no tempo para um número de passos compátivel com o valor de h.
- Para uma dada configuração (h, Δt e método de avanço no tempo), encontre o tempo t no qual a temperatura atinge o estado estacionário com tolerância de 10^{-3}.

Experimento 2: Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor nula e fluxo prescrito

- Parâmetros básicos:
  $\kappa = 0.835$, $f(x,t) = 0$ e $(0,l) = (0,10)$.
- Condições de contorno e iniciais:
  $u(0,t) = 100^0 C$, $\frac{\partial u(10,t)}{\partial x} = 0$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10]$
- Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:
  - $h = 1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{h^2}{2\kappa}$
  - $h = 0.1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{h^2}{2\kappa}$
  - $h = 0.01$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{h^2}{2\kappa}$
  - Para cada valor de Δt observe o comportamento dos 3 métodos de avanço no tempo para um número de passos compátivel com o valor de h.
- Para uma dada configuração (h, Δt e método de avanço no tempo), encontre o tempo t no qual a temperatura atinge o estado estacionário com tolerância de 10^{-3}.

Experimento 3: Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor unitária e fluxo prescrito

- Parâmetros básicos:
  $\kappa = 0.835$, $f(x,t) = 1$ e $(0,l) = (0,10)$.
- Condições de contorno e iniciais:
  $u(0,t) = 100^0 C$, $\frac{\partial u(10,t)}{\partial x} = 0$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10]$
- Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:
  - $h = 1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{h^2}{2\kappa}$
  - $h = 0.1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{h^2}{2\kappa}$
  - $h = 0.01$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 > \frac{h^2}{2\kappa}$
  - Para cada valor de Δt observe o comportamento dos 3 métodos de avanço no tempo para um número de passos compátivel com o valor de h.
- Para uma dada configuração (h, Δt e método de avanço no tempo), encontre o tempo t no qual a temperatura atinge o estado estacionário com tolerância de 10^{-3}.

Equação da onda acústica bidimensional

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = s_\phi \quad \text{em} \quad \Omega = (0, L) \times (0, L)$$

$\phi = \phi(x, y, t) = \phi(r, t)$
$s_\phi(r, t) = \delta(r - r_o)f(t)$, onde $f(t) = (1 - 2\pi^2 f_c^2 t^2)e^{-\pi^2 f_c^2 t^2}$

- Fonte localizada no ponto $r_0 = (0, 0)$ do domínio.

Condições iniciais:
$\phi(x, y, 0) = \phi^0(x, y) = 0$
$\phi'(x, y, 0) = \phi'^0(x, y) = 0$

Esquema explícito no tempo (I)

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = s_\phi$$

$$\left(\frac{\phi_{i+1}^k - 2\phi_i^k + \phi_{i-1}^k}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i+n}^k - 2\phi_i^k + \phi_{i-n}^k}{\Delta y^2}\right) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\phi_i^{k+1} - 2\phi_i^k + \phi_i^{k-1}}{\Delta t^2} = {s_\phi}_i^k$$

$$1 \le i \le N = n^2$$

$$(\Delta x = \Delta y)$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}(\phi_{i+n}^k + \phi_{i+1}^k - 4\phi_i^k + \phi_{i-1}^k + \phi_{i-n}^k) - \frac{1}{\alpha^2\Delta t^2}(\phi_i^{k+1} - 2\phi_i^k + \phi_i^{k-1}) = {s_\phi}_i^k$$

$$(\times\ \Delta x^2)$$

Esquema explícito no tempo (II)

$$(\phi_{i+n}^k + \phi_{i+1}^k - 4\phi_i^k + \phi_{i-1}^k + \phi_{i-n}^k) - \frac{\Delta x^2}{\alpha^2 \Delta t^2}(\phi_i^{k+1} - 2\phi_i^k + \phi_i^{k-1}) = (\Delta x^2) {s_\phi}_i^k$$

$$-\left(\frac{\Delta x^2}{\alpha^2 \Delta t^2}\right)\phi_i^{k+1} = [-\phi_{i+n}^k - \phi_{i+1}^k + 4\phi_i^k - \phi_{i-1}^k - \phi_{i-n}^k] - \left(\frac{2\Delta x^2}{\alpha^2 \Delta t^2}\right)\phi_i^k + \left(\frac{\Delta x^2}{\alpha^2 \Delta t^2}\right)\phi_i^{k-1} + (\Delta x^2) {s_\phi}_i^k$$

$$\phi_i^{k+1} = -\left(\frac{\alpha^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\right)[-\phi_{i+n}^k - \phi_{i+1}^k + 4\phi_i^k - \phi_{i-1}^k - \phi_{i-n}^k] + 2\phi_i^k - \phi_i^{k-1} - (\alpha^2 \Delta t^2) {s_\phi}_i^k$$

Formato Matriz-Vetor: $\phi^{k+1} = -\hat{\alpha} A \phi^k + 2\phi^k - \phi^{k-1} - f$,
onde $\hat{\alpha} = \left(\frac{\alpha^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\right)$, $f = (\alpha^2 \Delta t^2) {s_\phi}^k$ e A tem estrutura pentadiagonal $(-1, -1, +4, -1, -1)$.

Exemplo com $n = 626 \times 626$ **Parâmetros:**
$L = 10.000$ m; $\Delta x = 16$ m; $\Delta y = 16$ m; $t_f = 5$ s; $\Delta t = 0{,}003$ s; $\alpha = 2.000$ m/s; $f_c = 5$ Hz .