Problemas de Valor no Contorno (PVC)

Lucia Catabriga

luciac@inf.ufes.br

May 28, 2019

Aspectos Gerais - Definição

- CFD - *Computational Fluid Dynamics* ou DFC - Dinâmica dos Fluidos Computacional:

Aspectos Gerais - Definição

- CFD - *Computational Fluid Dynamics* ou DFC - Dinâmica dos Fluidos Computacional:
  - Dinâmica dos Fluidos Computacional é área da computação científica que estuda métodos computacionais para simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem troca de calor.

Aspectos Gerais - Definição

- CFD - *Computational Fluid Dynamics* ou DFC - Dinâmica dos Fluidos Computacional:
  - Dinâmica dos Fluidos Computacional é área da computação científica que estuda métodos computacionais para simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem troca de calor.
  - Fluido em movimentos (gás e líquido) são regidos por equações diferenciais parciais que representam leis de conservação da massa, momento e energia.

Aspectos Gerais - Definição

- CFD - *Computational Fluid Dynamics* ou DFC - Dinâmica dos Fluidos Computacional:
    - Dinâmica dos Fluidos Computacional é área da computação científica que estuda métodos computacionais para simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem troca de calor.
    - Fluido em movimentos (gás e líquido) são regidos por equações diferenciais parciais que representam leis de conservação da massa, momento e energia.
    - Dinâmica de Fluidos Computacional é a arte de substituição de tais sistemas de equações diferenciais parciais por um conjunto de equações algébricas que podem ser resolvidos usando computadores digitais.

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade
  - μ viscosidade

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade
  - μ viscosidade
  - p pressão

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade
  - μ viscosidade
  - p pressão
  - T temperatura

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade
  - μ viscosidade
  - p pressão
  - T temperatura
  - $\boldsymbol{v}$ velocidade
- Classificação do movimento de fluidos:
  - viscoso $\Leftrightarrow$ não viscoso

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade
  - μ viscosidade
  - p pressão
  - T temperatura
  - $\boldsymbol{v}$ velocidade
- Classificação do movimento de fluidos:
  - viscoso $\Leftrightarrow$ não viscoso
  - compressível $\Leftrightarrow$ incompressível

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade
  - μ viscosidade
  - p pressão
  - T temperatura
  - $\boldsymbol{v}$ velocidade
- Classificação do movimento de fluidos:
  - viscoso $\Leftrightarrow$ não viscoso
  - compressível $\Leftrightarrow$ incompressível
  - estacionário $\Leftrightarrow$ transiente

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade
  - μ viscosidade
  - p pressão
  - T temperatura
  - $\boldsymbol{v}$ velocidade
- Classificação do movimento de fluidos:
  - viscoso $\Leftrightarrow$ não viscoso
  - compressível $\Leftrightarrow$ incompressível
  - estacionário $\Leftrightarrow$ transiente
  - laminar $\Leftrightarrow$ turbulento

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade
  - μ viscosidade
  - p pressão
  - T temperatura
  - $\boldsymbol{v}$ velocidade
- Classificação do movimento de fluidos:
  - viscoso $\Leftrightarrow$ não viscoso
  - compressível $\Leftrightarrow$ incompressível
  - estacionário $\Leftrightarrow$ transiente
  - laminar $\Leftrightarrow$ turbulento
  - unifásico $\Leftrightarrow$ multifásico

- A confiabilidade de simulações em DFC é maior:
  - para escoamentos laminares (lentos) que turbulentos (rápidos).

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade
  - μ viscosidade
  - p pressão
  - T temperatura
  - $\boldsymbol{v}$ velocidade
- Classificação do movimento de fluidos:
  - viscoso $\Leftrightarrow$ não viscoso
  - compressível $\Leftrightarrow$ incompressível
  - estacionário $\Leftrightarrow$ transiente
  - laminar $\Leftrightarrow$ turbulento
  - unifásico $\Leftrightarrow$ multifásico

- A confiabilidade de simulações em DFC é maior:
  - para escoamentos laminares (lentos) que turbulentos (rápidos).
  - para escoamentos unifásicos que multifásicos.

Características dos Fluidos

- Propriedades Macroscópicas:
  - ρ densidade
  - μ viscosidade
  - p pressão
  - T temperatura
  - $\boldsymbol{v}$ velocidade
- Classificação do movimento de fluidos:
  - viscoso $\Leftrightarrow$ não viscoso
  - compressível $\Leftrightarrow$ incompressível
  - estacionário $\Leftrightarrow$ transiente
  - laminar $\Leftrightarrow$ turbulento
  - unifásico $\Leftrightarrow$ multifásico

- A confiabilidade de simulações em DFC é maior:
  - para escoamentos laminares (lentos) que turbulentos (rápidos).
  - para escoamentos unifásicos que multifásicos.
  - para sistemas quimicamente inertes que escoamentos reativos.

Aspectos Gerais - História

Antiguidade: avanços concentrados em obras hidráulicas: arquedutos, canais, portos, balneários.

Aspectos Gerais - História

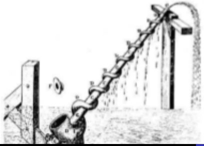
Antiguidade: avanços concentrados em obras hidráulicas: arquedutos, canais, portos, balneários.

- Arquimedes (287-212 AC): iniciou as áreas de mecânica estática, hidrostática, e picnometria (medir a densidade e volumes de objetos).

Aspectos Gerais - História

Antiguidade: avanços concentrados em obras hidráulicas: arquedutos, canais, portos, balneários.

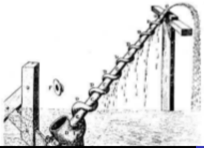
- Arquimedes (287-212 AC): iniciou as áreas de mecânica estática, hidrostática, e picnometria (medir a densidade e volumes de objetos).
- Uma das invenções de Arquimedes é o parafuso de água, que pode ser usado como elevador e para transporte de água.



Aspectos Gerais - História

Antiguidade: avanços concentrados em obras hidráulicas: arquedutos, canais, portos, balneários.

- Arquimedes (287-212 AC): iniciou as áreas de mecânica estática, hidrostática, e picnometria (medir a densidade e volumes de objetos).
- Uma das invenções de Arquimedes é o parafuso de água, que pode ser usado como elevador e para transporte de água.



Característica: Experimental e Matemática

Aspectos Gerais - História

Aspectos Gerais - História

Leonardo da Vinci(1452-1519):

Aspectos Gerais - História

Leonardo da Vinci(1452-1519):

- dentre suas diversas contribuições dedicou-se a observar fenômenos naturais visíveis e descrevê-los em suas pinturas, desenhos, etc...

Aspectos Gerais - História
Leonardo da Vinci(1452-1519):

- dentre suas diversas contribuições dedicou-se a observar fenômenos naturais visíveis e descrevê-los em suas pinturas, desenhos, etc...
- Participou do planejamento e supervisão de obras de portos e canais na Itália e na França.

Aspectos Gerais - História

Leonardo da Vinci(1452-1519):

- dentre suas diversas contribuições dedicou-se a observar fenômenos naturais visíveis e descrevê-los em suas pinturas, desenhos, etc...
- Participou do planejamento e supervisão de obras de portos e canais na Itália e na França.
- Sua contribuição para a mecânica dos fluidos foi o tratado: O movimento e a extensão da água (*Del moto e misura dell'acqua* - descreve o movimento de águas, ondas, redemoinhos, jatos de água, etc ...).

Aspectos Gerais - História
Leonardo da Vinci(1452-1519):

- dentre suas diversas contribuições dedicou-se a observar fenômenos naturais visíveis e descrevê-los em suas pinturas, desenhos, etc...
- Participou do planejamento e supervisão de obras de portos e canais na Itália e na França.
- Sua contribuição para a mecânica dos fluidos foi o tratado: O movimento e a extensão da água (*Del moto e misura dell'acqua* - descreve o movimento de águas, ondas, redemoinhos, jatos de água, etc ...).

Aspectos Gerais - História

Leonardo da Vinci(1452-1519):

- dentre suas diversas contribuições dedicou-se a observar fenômenos naturais visíveis e descrevê-los em suas pinturas, desenhos, etc...
- Participou do planejamento e supervisão de obras de portos e canais na Itália e na França.
- Sua contribuição para a mecânica dos fluidos foi o tratado: O movimento e a extensão da água (*Del moto e misura dell'acqua* - descreve o movimento de águas, ondas, redemoinhos, jatos de água, etc ...).

Característica: Experimental e Matemática

Aspectos Geriais - História
Leonhard Euler (1707-1783):

Aspectos Geriais - História
Leonhard Euler (1707-1783):

- Um dos fundadores da hidrodinâmica. Deduziu as equações de Euler, que descrevem a conservação de massa

Aspectos Geriais - História

Leonhard Euler (1707-1783):

- Um dos fundadores da hidrodinâmica. Deduziu as equações de Euler, que descrevem a conservação de massa

Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) e George Gabriel Stokes (1819-1903):

Aspectos Geriais - História

Leonhard Euler (1707-1783):

- Um dos fundadores da hidrodinâmica. Deduziu as equações de Euler, que descrevem a conservação de massa

Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) e George Gabriel Stokes (1819-1903):

- Introduziram o transporte viscoso para as equações de Euler, resultando nas equação de Navier-Stokes, base da dinâmica dos fluidos computacional moderna.

Aspectos Geriais - História

Leonhard Euler (1707-1783):

- Um dos fundadores da hidrodinâmica. Deduziu as equações de Euler, que descrevem a conservação de massa

Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) e George Gabriel Stokes (1819-1903):

- Introduziram o transporte viscoso para as equações de Euler, resultando nas equação de Navier-Stokes, base da dinâmica dos fluidos computacional moderna.

Aspectos Gerais - Equações de Navier-Stokes

$$\overbrace{\rho\Big(\underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\substack{\text{Unsteady}\\ \text{acceleration}}} + \underbrace{(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}}_{\substack{\text{Convective}\\ \text{acceleration}}}\Big)}^{\text{Inertia}} = \underbrace{-\nabla p}_{\substack{\text{Pressure}\\ \text{gradient}}} + \underbrace{\mu\nabla^2\mathbf{v}}_{\text{Viscosity}} + \underbrace{\mathbf{f}}_{\substack{\text{Other}\\ \text{forces}}}$$

Escoamentos incompressíveis e isotérmicos bidimensionais:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Equação de Continuidade: princípio físico da conservação de massa

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v^2}{\partial y}+\frac{\partial uv}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

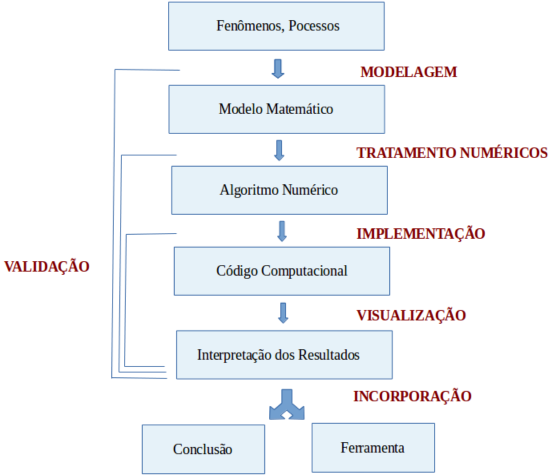
Equações de Momento: aplicação da lei de Newton (F =m.a)

u,v : velocidades nas direções x e y, respectivamente

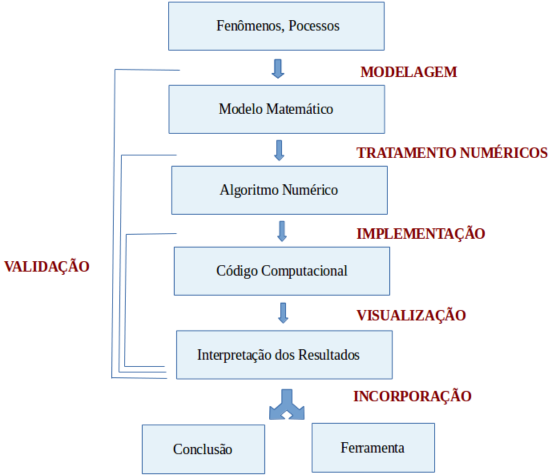
ρ : densidade

p : pressão

Como funciona a DFC?

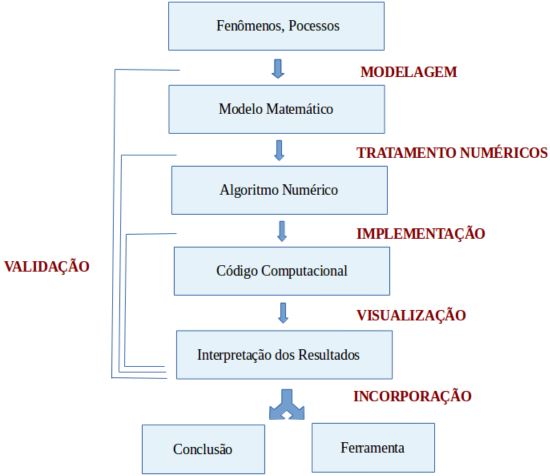


Como funciona a DFC?



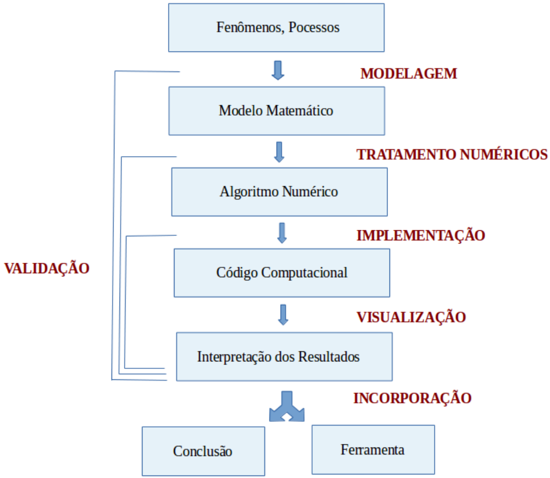
- Equações Governantes

Como funciona a DFC?



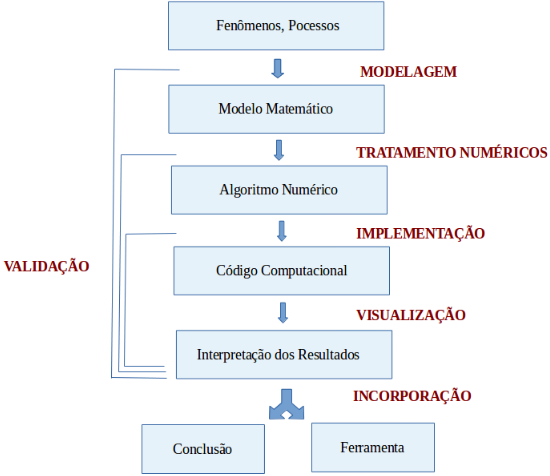
- Equações Governantes
- Discretização do domínio

Como funciona a DFC?



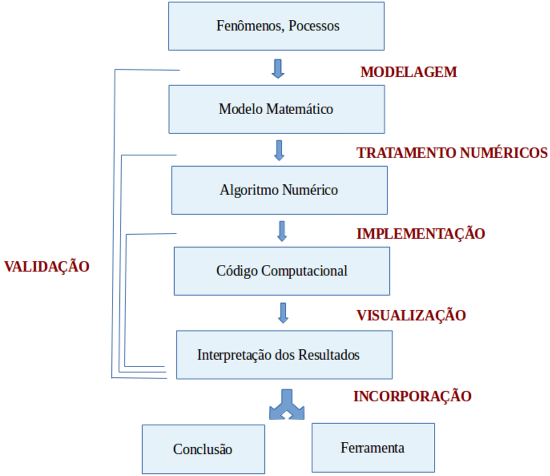
- Equações Governantes
- Discretização do domínio
- Definições do método numérico de aproximação

Como funciona a DFC?



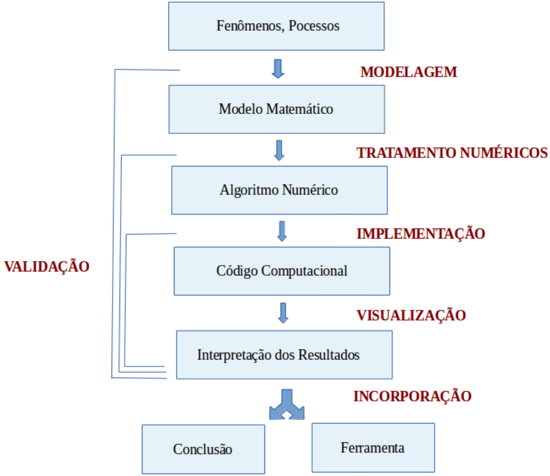
- Equações Governantes
- Discretização do domínio
- Definições do método numérico de aproximação
- Solução de Sistemas de Equações Algébricas

Como funciona a DFC?



- Equações Governantes
- Discretização do domínio
- Definições do método numérico de aproximação
- Solução de Sistemas de Equações Algébricas
- Implementação

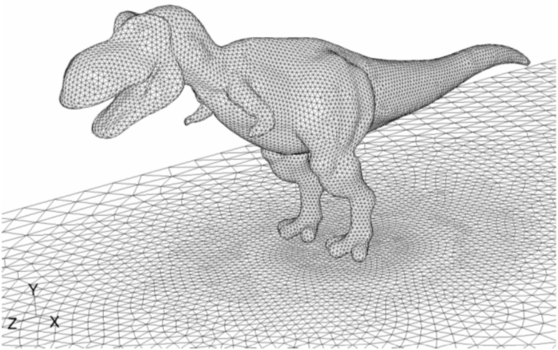
Como funciona a DFC?



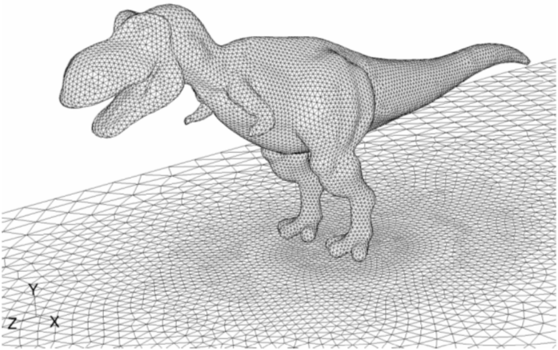
- Equações Governantes
- Discretização do domínio
- Definições do método numérico de aproximação
- Solução de Sistemas de Equações Algébricas
- Implementação
- Análise dos resultados

Discretização do Domínio

Discretização do Domínio

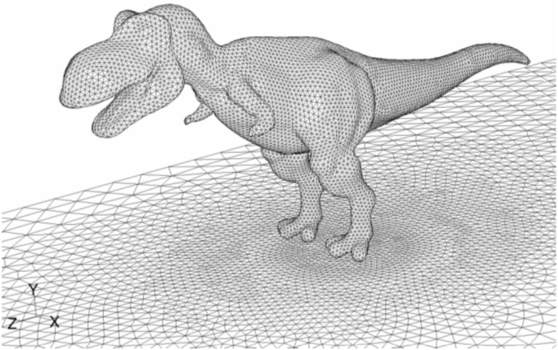


Discretização do Domínio



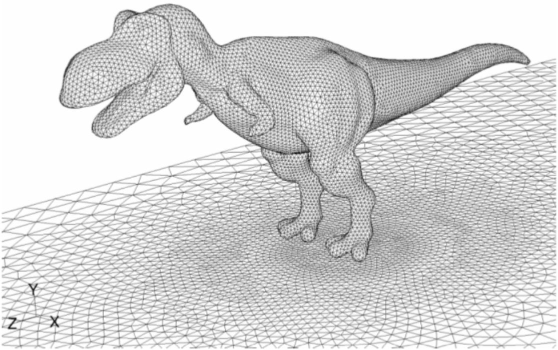
- definição do tipo de discretização (malhas estruturadas, não estruturadas, dimensão do domínio, tipo de método)

Discretização do Domínio



- definição do tipo de discretização (malhas estruturadas, não estruturadas, dimensão do domínio, tipo de método)
- definição de pontos do domínio que são conhecidos, que são incógnitas.

Discretização do Domínio



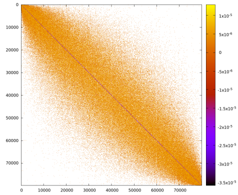
- definição do tipo de discretização (malhas estruturadas, não estruturadas, dimensão do domínio, tipo de método)
- definição de pontos do domínio que são conhecidos, que são incógnitas.
- definição de condições de contorno e condições iniciais

Solução de Sistemas de Equações Algébricas

$$Ax = b$$

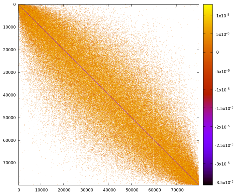
Solução de Sistemas de Equações Algébricas

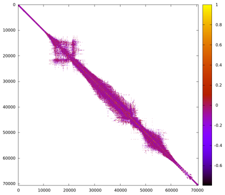
$$Ax = b$$



Solução de Sistemas de Equações Algébricas

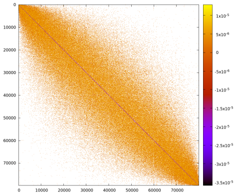
$$Ax = b$$

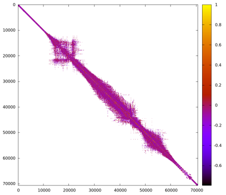


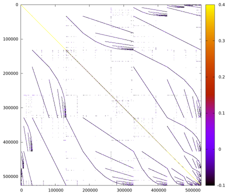


Solução de Sistemas de Equações Algébricas

$$Ax = b$$

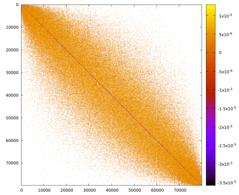


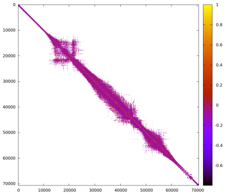


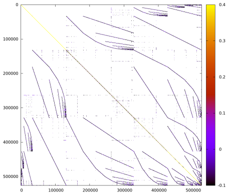


Solução de Sistemas de Equações Algébricas

$$Ax = b$$





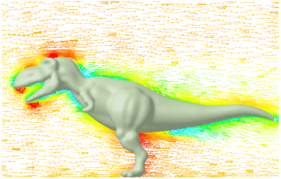


Como armazenar e resolver sistemas esparsos de grande porte de forma otimizada?

Análise dos Resultados

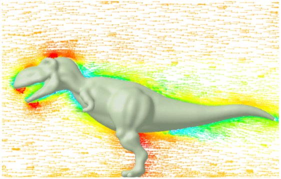
Análise dos Resultados

Campo de velocidades
em torno do dinossauro:

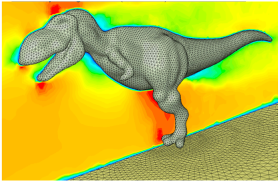


Análise dos Resultados

Campo de velocidades em torno do dinossauro:

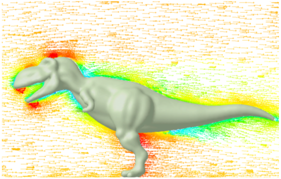


Magnitude da velocidade no dinossauro:

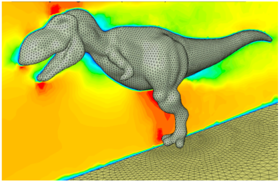


Análise dos Resultados

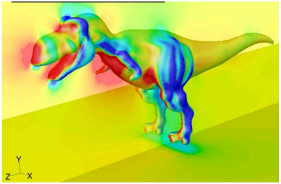
Campo de velocidades em torno do dinossauro:



Magnitude da velocidade no dinossauro:



Campo de pressão no dinossauro:



Equações Diferenciais Parciais - EDP

- Classificação Matemática:

Equações Diferenciais Parciais - EDP

- Classificação Matemática:
  - Elípticas

Equações Diferenciais Parciais - EDP

- Classificação Matemática:
  - Elípticas
  - Parabólicas

Equações Diferenciais Parciais - EDP

- Classificação Matemática:
    - Elípticas
    - Parabólicas
    - Hiperbólicas

Equações Diferenciais Parciais - EDP

- Classificação Matemática:
  - Elípticas
  - Parabólicas
  - Hiperbólicas
- Classificação Física:

Equações Diferenciais Parciais - EDP

- Classificação Matemática:
  - Elípticas
  - Parabólicas
  - Hiperbólicas
- Classificação Física:
  - Problemas de Equilíbrio ou estacionárias (não evoluem com o tempo)

Equações Diferenciais Parciais - EDP

- Classificação Matemática:
  - Elípticas
  - Parabólicas
  - Hiperbólicas
- Classificação Física:
  - Problemas de Equilíbrio ou estacionárias (não evoluem com o tempo)
  - Problemas de propagação ou transientes (evoluem com o tempo)

Classificação Matemática - Exemplo EDP de ordem 2

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\phi}{\partial x} + E\frac{\partial\phi}{\partial y} + F\phi = H$$

Classificação Matemática - Exemplo EDP de ordem 2

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\phi}{\partial x} + E\frac{\partial\phi}{\partial y} + F\phi = H$$

Elíptica se:

Classificação Matemática - Exemplo EDP de ordem 2

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\phi}{\partial x} + E\frac{\partial\phi}{\partial y} + F\phi = H$$

Elíptica se:

$$B^2 - 4AC < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = H \ \text{ Eq. de Poisson}$$

Parabólica se:

Classificação Matemática - Exemplo EDP de ordem 2

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\phi}{\partial x} + E\frac{\partial\phi}{\partial y} + F\phi = H$$

Elíptica se:

$$B^2 - 4AC < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = H \;\; \text{Eq. de Poisson}$$

Parabólica se:

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \Rightarrow \quad -\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = H \;\; \text{Eq. Calor}$$

Hiperbólica se:

Classificação Matemática - Exemplo EDP de ordem 2

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\phi}{\partial x} + E\frac{\partial\phi}{\partial y} + F\phi = H$$

Elíptica se:

$$B^2 - 4AC < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = H \ \text{ Eq. de Poisson}$$

Parabólica se:

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \Rightarrow \quad -\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = H \ \text{ Eq. Calor}$$

Hiperbólica se:

$$B^2 - 4AC > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t} = H \ \text{ Eq. Ondas}$$

EDP - Problemas de Equilíbrio

EDP - Problemas de Equilíbrio

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) não se altera com o passar do tempo

EDP - Problemas de Equilíbrio

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) não se altera com o passar do tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais elípticas

EDP - Problemas de Equilíbrio

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) não se altera com o passar do tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais elípticas
- O domínio de interesse é fechado

EDP - Problemas de Equilíbrio

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) não se altera com o passar do tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais elípticas
- O domínio de interesse é fechado
- A solução em qualquer ponto no interior do domínio depende das condições em todos os pontos do contorno

EDP - Problemas de Equilíbrio

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) não se altera com o passar do tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais elípticas
- O domínio de interesse é fechado
- A solução em qualquer ponto no interior do domínio depende das condições em todos os pontos do contorno
- Pertubações se deslocam em todas as direções

EDP - Problemas de Equilíbrio

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) não se altera com o passar do tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais elípticas
- O domínio de interesse é fechado
- A solução em qualquer ponto no interior do domínio depende das condições em todos os pontos do contorno
- Pertubações se deslocam em todas as direções
- Exemplos:

EDP - Problemas de Equilíbrio

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) não se altera com o passar do tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais elípticas
- O domínio de interesse é fechado
- A solução em qualquer ponto no interior do domínio depende das condições em todos os pontos do contorno
- Pertubações se deslocam em todas as direções
- Exemplos:
  - Equação de Poisson

EDP - Problemas de Equilíbrio

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) não se altera com o passar do tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais elípticas
- O domínio de interesse é fechado
- A solução em qualquer ponto no interior do domínio depende das condições em todos os pontos do contorno
- Pertubações se deslocam em todas as direções
- Exemplos:
  - Equação de Poisson
  - Equação de Laplace

EDP - Problemas de Equilíbrio

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) não se altera com o passar do tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais elípticas
- O domínio de interesse é fechado
- A solução em qualquer ponto no interior do domínio depende das condições em todos os pontos do contorno
- Pertubações se deslocam em todas as direções
- Exemplos:
  - Equação de Poisson
  - Equação de Laplace
  - Equação de Difusão-Advecção-Reação estacionária

EDP - Problemas de Equilíbrio - Exemplos:
Equação de Laplace:

EDP - Problemas de Equilíbrio - Exemplos:

Equação de Laplace:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Equação de Poisson:

EDP - Problemas de Equilíbrio - Exemplos:

Equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Equação de Poisson:

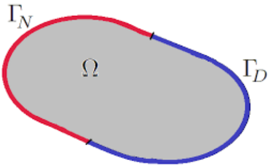
$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Difusão-Advecção-Reação:

EDP - Problemas de Equilíbrio - Exemplos:

Equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$



Equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Difusão-Advecção-Reação:

$$-\nabla(.\boldsymbol{\kappa}\nabla\phi) + \boldsymbol{\beta}.\nabla\phi + \gamma\phi = f(x, y)$$

EDP - Problemas de Equilíbrio - Exemplos:

Equação de Laplace:

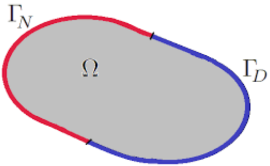
$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = f(x,y)$$

Difusão-Advecção-Reação:

$$-\nabla(.\boldsymbol{\kappa}\nabla\phi) + \boldsymbol{\beta}.\nabla\phi + \gamma\phi = f(x,y)$$



Solução única $\Leftrightarrow$ Condições de contorno

EDP - Problemas Transientes

EDP - Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo

EDP - Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais hiperbólicas ou parabólicas

EDP - Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais hiperbólicas ou parabólicas
- O domínio de interesse é aberto

EDP - Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais hiperbólicas ou parabólicas
- O domínio de interesse é aberto
- Conhecidos como problema de valor inicial

EDP - Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais hiperbólicas ou parabólicas
- O domínio de interesse é aberto
- Conhecidos como problema de valor inicial
- As condições de contorno são conhecidas em todo instante de tempo

EDP - Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais hiperbólicas ou parabólicas
- O domínio de interesse é aberto
- Conhecidos como problema de valor inicial
- As condições de contorno são conhecidas em todo instante de tempo
- solução é calculada partindo da suposição dos dados iniciais satisfazendo as condições de contorno

EDP - Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais hiperbólicas ou parabólicas
- O domínio de interesse é aberto
- Conhecidos como problema de valor inicial
- As condições de contorno são conhecidas em todo instante de tempo
- solução é calculada partindo da suposição dos dados iniciais satisfazendo as condições de contorno
- Exemplos:

EDP - Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais hiperbólicas ou parabólicas
- O domínio de interesse é aberto
- Conhecidos como problema de valor inicial
- As condições de contorno são conhecidas em todo instante de tempo
- solução é calculada partindo da suposição dos dados iniciais satisfazendo as condições de contorno
- Exemplos:
  - Equação do Calor

EDP - Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais hiperbólicas ou parabólicas
- O domínio de interesse é aberto
- Conhecidos como problema de valor inicial
- As condições de contorno são conhecidas em todo instante de tempo
- solução é calculada partindo da suposição dos dados iniciais satisfazendo as condições de contorno
- Exemplos:
  - Equação do Calor
  - Equação de Ondas

EDP - Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais hiperbólicas ou parabólicas
- O domínio de interesse é aberto
- Conhecidos como problema de valor inicial
- As condições de contorno são conhecidas em todo instante de tempo
- solução é calculada partindo da suposição dos dados iniciais satisfazendo as condições de contorno
- Exemplos:
  - Equação do Calor
  - Equação de Ondas
  - Equação de Difusão-Advecção-Reação transiente

EDP - Problemas Transientes - Exemplos

EDP - Problemas Transientes - Exemplos

Equação do Calor:

EDP - Problemas Transientes - Exemplos

Equação do Calor:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \nabla^2 \phi = f(x, y, t)$$

Equação de Ondas:

EDP - Problemas Transientes - Exemplos

Equação do Calor:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \nabla^2 \phi = f(x, y, t)$$

Equação de Ondas:

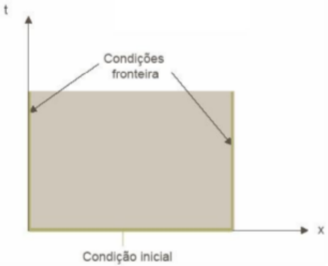
$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 t} = f(x, y, t)$$

Difusão-Advecção-Reação transiente:

EDP - Problemas Transientes - Exemplos

Equação do Calor:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \nabla^2 \phi = f(x, y, t)$$



Equação de Ondas:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 t} = f(x, y, t)$$

Difusão-Advecção-Reação transiente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla(.\boldsymbol{\kappa} \nabla \phi) + \boldsymbol{\beta}.\nabla \phi + \gamma \phi = f(x, y, t)$$

EDP - Problemas Transientes - Exemplos

Equação do Calor:

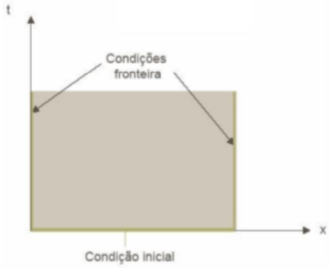
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \nabla^2 \phi = f(x, y, t)$$

Equação de Ondas:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 t} = f(x, y, t)$$

Difusão-Advecção-Reação transiente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla(.\boldsymbol{\kappa} \nabla \phi) + \boldsymbol{\beta}.\nabla \phi + \gamma \phi = f(x, y, t)$$



Solução única $\Leftrightarrow$ Condições de contorno

Introdução

- A solução de Problemas de Valor no Contorno (PVC) pelo método das Diferenças Finitas consiste em:
    - Discretizar o domínio;
    - Aplicar aproximações de diferenças finitas nas derivadas da equação diferencial;
    - Aplicar condições de contorno.

Dadas as funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ contínuas em (a, b), encontrar $u(x)$ tal que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = r(x) \qquad a < x < b \tag{1}$$

com condições de contorno do tipo:

$$u(a) = u_a \text{ ou } \quad \frac{du(a)}{dx} = \sigma_a \text{ ou } \quad \alpha_a\frac{du(a)}{dx} + \beta_a u(a) = \gamma_a \tag{2}$$

$$u(b) = u_b \text{ ou } \quad \frac{du(b)}{dx} = \sigma_b \text{ ou } \quad \alpha_b\frac{du(b)}{dx} + \beta_b u(b) = \gamma_b \tag{3}$$

onde u_a, u_b, σ_a, σ_b, α_a, β_a, α_b, β_b, γ_a e γ_b são constantes conhecidas do problema.

Discretização do Domínio

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{(b-a)}{(n-1)} \\
x_i &= a + (i-1)h, \text{ sendo } a = x_1, b = x_n \text{ e } n \text{ número de incógnitas}
\end{aligned}
$$

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

Objetivo:

obter aproximações $u_i \approx u(x_i) \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n$

Aproximação das derivadas por Diferenças finitas

$$
\begin{aligned}
u'(x_i) &\approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad \theta(h) \text{ (Diferença Adiantada)} \\
u'(x_i) &\approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad \theta(h) \text{ (Diferença Atrasada)} \\
u'(x_i) &\approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad \theta(h^2) \text{ (Diferença Central)} \\
u''(x_i) &\approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \quad \theta(h^2)
\end{aligned}
$$

Aplicando as Diferenças finitas na equação diferencial

$$\left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}\right) + p_i \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right) + q_i u_i = r_i$$

$$b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = r_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

onde:

$$a_i = q_i - (2/h^2) \quad b_i = (1/h^2) - p_i/(2h) \quad c_i = (1/h^2) + p_i/(2h)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & b_i & a_i & c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & b_n & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}$$

Matriz Tridiagonal!!!

Configuração - 1D - Tridiagonal

$$
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix}
$$

Condições de Contorno - Valor Prescrito

A função u é conhecida em $x_1 = a$ e/ou $x_n = b$, ou seja,
$u_1 = u(x_1) = u_a$ e/ou $u_n = u(x_n) = u_b$

Ação:

$a_1 \to \bar{a}_1 = 1, \quad c_1 \to \bar{c}_1 = 0, \quad r_1 \to \bar{r}_1 = u_a$ e/ou
$a_n \to \bar{a}_n = 1, \quad b_1 \to \bar{b}_1 = 0, \quad r_n \to \bar{r}_n = u_b$

Supondo valor prescrito em $x_1 = a$ e $x_n = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & b_i & a_i & c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ u_b \end{bmatrix}$$

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

A derivada de u é conhecida: $\frac{du(a)}{dx} = \sigma_a$ ou $\frac{du(b)}{dx} = \sigma_b$
A variável u_{i-1} (para $i = 1$) ou a variável u_{i+1} (para $i = n$) deve ser substituida na equação linear $b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = r_i$. Para isso, deve ser usado aproximações de diferenças finitas convenientes na condição de derivada conhecida no contorno:
Para $i = 1 \Rightarrow u_i' \approx \frac{u_1 - u_0}{h} = \sigma_a \Rightarrow u_0 = u_1 - h\sigma_a$
Para $i = n \Rightarrow u_n' \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \sigma_b \Rightarrow u_{n+1} = u_n + h\sigma_b$

Ação:

$a_1 \rightarrow \bar{a}_1 = a_1 + b_1, \quad r_1 \rightarrow \bar{r}_1 = r_1 + b_1 h\sigma_a$ ou
$a_n \rightarrow \bar{a}_n = a_n + c_n, \quad r_n \rightarrow \bar{r}_n = r_n - c_n h\sigma_b$

Supondo valor prescrito em $x_1 = a$ e derivada prescrita em $x_n = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & b_n & a_n + c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n - c_n h\sigma_b \end{bmatrix}$$

Condições de Contorno - Condição mista

Um combinação linear entre u e u' é conhecida: $\alpha_a u'(a) + \beta_a u(a) = \gamma_a$ ou $\alpha_b u'(b) + \beta_b u(b) = \gamma_b$

A variável u_{i-1} (para $i = 1$) ou a variável u_{i+1} (para $i = n$) deve ser substituida na equação linear $b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = r_i$. Para isso, deve ser usado aproximações de diferenças finitas convenientes na condição no contorno:

$i = 1 \Rightarrow \alpha_a \frac{u_1 - u_0}{h} + \beta_a u_1 = \gamma_a \Rightarrow u_0 = (1 + h\beta_a/\alpha_a)u_1 - h\gamma_a/\alpha_a$

$i = n \Rightarrow \alpha_b \frac{u_{n+1} - u_n}{h} + \beta_b u_n = \gamma_b \Rightarrow u_{n+1} = (1 - h\beta_b/\alpha_b)u_n + h\gamma_b/\alpha_b$

Ação:

$a_1 \rightarrow \bar{a}_1 = a_1 + b_1(1 + h\beta_a/\alpha_a), \quad r_1 \rightarrow \bar{r}_1 = r_1 + b_1 h\gamma_a/\alpha_a$ ou

$a_n \rightarrow \bar{a}_n = a_n + c_n(1 - h\beta_b/\alpha_b), \quad r_n \rightarrow \bar{r}_n = r_n - c_n h\gamma_b/\alpha_b$

Supondo condição mista em $x_1 = a$ e valor prescrito em $x_n = b$:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & c_1 & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ u_b \end{bmatrix}$$

Exemplo com solução conhecida

Encontre a solução aproximada por diferenças finitas para do PVC:

$$
\begin{aligned}
u'' - \frac{1}{2}u' + u &= x^2 + \frac{1}{2} \text{ para} x \in (0,1) \\
u(0) &= -1 \\
u(1) &= 1 \\
ou & \\
u'(0) &= 1 \\
u(1) &= 1 \\
ou & \\
u(0) &= -1 \\
-u'(1) + 2u(1) &= -3
\end{aligned}
$$

Considere n = 5, 10 e 50

Exemplo com solução conhecida

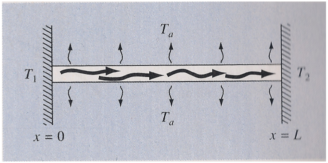
Encontre a solução aproximada por diferenças finitas para do PVC:

$$
\begin{aligned}
u'' - \frac{1}{2}u' + u &= x^2 + \frac{1}{2} \text{ para} x \in (0,1) \\
u(0) &= -1 \\
u(1) &= 1 \\
ou & \\
u'(0) &= 1 \\
u(1) &= 1 \\
ou & \\
u(0) &= -1 \\
-u'(1) + 2u(1) &= -3
\end{aligned}
$$

Considere n = 5, 10 e 50
Sabendo que a solução exata é $u(x) = x^2 + x - 1$ avalie o erro cometido em $x = 0.5$

Conservação de Calor em uma haste longa e fina

A conservação de calor em uma haste longa e fina (conforme Figura **??**), considerando que a haste não esteja isolada e que o sistema esteja em estado estacionário, pode ser modelada pelo PVC:



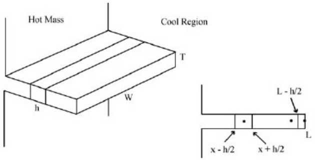
Geometria da haste longa e fina

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2T}{dx^2} + K(T_a - T) &= 0 \text{ em } (0, L) \\
T(0) &= T_1 \\
T(L) &= T_2
\end{aligned}
$$

onde K representa o coeficiente de transferência de calor que paramatriza as taxas de dissipação de calor para o ar (m^{-2}) e T_a é a temperatura do ar em torno da haste (^0C). Considerando $T(0) = 40^0C$, $T(10) = 200^0C$, $K = 0.01\ m^{-2}$ e $T_a = 20\ ^0C$, obtenha a distribuição da temperatura no interior do intervalo $(0, 10)$, considerando $n = 10, 50, 100$. Plote os gráfico da solução aproximada para cada n.

Resfriador unidimensional

Considere o problema de resfriar uma massa aquecida como mostra a Fig. **??**. Exemplos podem incluir o resfriamento de chips de computadores ou amplificadores elétricos. O modelo matemático que descreve a transferência de calor na direção unidimensional x é dado pela Equação de transferência de calor (próximo slide). Detalhes sobre a definição do modelo matemático pode ser encontrado em ([1]), disponível na página do curso.



Geometria do Resfriador

[1]R. E. White, *Computational Modeling with Methods and Analysis*, Department of Mathematics, North Carolina State University, 2003

Resfriador unidimensional

$$-\frac{d}{dx}\left(K\frac{du(x)}{dx}\right) + Cu(x) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

com condições de contorno do tipo:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ c_{ref}\,u(L) + K\frac{du(L)}{dx} &= c_{ref}\,u_{ref} \end{aligned}$$

onde K é a condutividade térmica, u_{ref} é uma temperatura de referência, u_0 é a temperatura inicial da massa e c_{ref} é a abilidade da superfície do resfriador de transmitir calor na região. A constante C e o termo fonte f são funções da geometria do resfriador (observe a Figura do resfriador), dadas por:

$$C \equiv \left(\frac{2W + 2T}{TW}\right) c_{ref} \qquad \text{e} \qquad f \equiv Cu_{ref}$$

onde a temperatura inicial da massa $u_0 = 160$, a temperatura de referência $u_{ref} = 70$, $K = 0.001$, $T = 0.1$, $W = 10$ e $L = 1$. Podemos considerar diferentes possibilidades para o coeficiente c_{ref}, por exemplo, $c_{ref} = 0.0001$, $c_{ref} = 0.001$, $c_{ref} = 0.01$, $c_{ref} = 0.1$.

Considerando $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$ encontre a solução aproximada para os diferentes coeficientes c_{ref}. Para cada caso plote o gráfico da solução aproximada, considerando $n = 50$.

Problema de Valor no Contorno - 2D

Supor k, $\beta_x(x,y)$, $\beta_y(x,y)$, $\gamma(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ *e* $f(x,y)$ *conhecidas, encontrar* $u(x,y)$ *em* $\Omega \in \Re^2$ *tal que:*

$$
\begin{aligned}
-k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\beta_x\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_y\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u &= f \text{ em } \Omega \\
u &= g \text{ em } \Gamma_g \\
-k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= h \text{ em } \Gamma_h \\
\alpha_q\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}+\beta_q u &= q \text{ em } \Gamma_q
\end{aligned}
$$

$$\partial\Omega = \Gamma_g + \Gamma_h + \Gamma_q$$

Discretização do Domínio Retangular

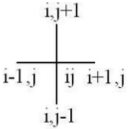
$$\Omega = \{(x,y), a < x < b, c < y < d\}$$

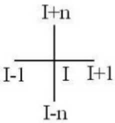
$$h_x = \frac{(b-a)}{(n-1)} \quad x_i = a + (i-1)h_x, \quad i = 1, \ldots, n$$

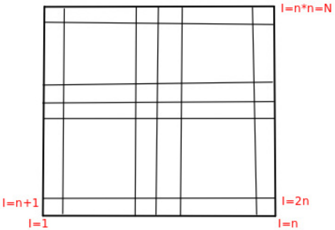
$$h_y = \frac{(d-c)}{(m-1)} \quad y_j = c + (j-1)h_y, \quad j = 1, \ldots, m$$

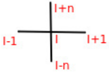
Objetivo:

obter aproximações $u_{ij} \approx u(x_i, y_j) \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$









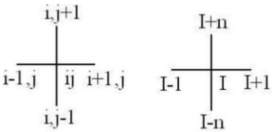
Aproximação das derivadas por Diferenças finitas

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} = \frac{u_{I+1} - u_{I-1}}{2h_x}, \quad \theta(h_x^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} = \frac{u_{I+n} - u_{I-n}}{2h_y} \quad \theta(h_y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2} = \frac{u_{I-1} - 2u_I + u_{I+1}}{h_x^2}, \quad \theta(h_x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = \frac{u_{I-n} - 2u_I + u_{I+n}}{h_y^2}, \quad \theta(h_x^2)$$



$$I = 1, 2, \ldots, m * n$$

Aproximação das derivadas por Diferenças finitas

$$
\begin{aligned}
-k\left(\frac{u_{I-1}-2u_I+u_{I+1}}{h_x^2}+\frac{u_{I-n}-2u_I+u_{I+n}}{h_y^2}\right) & + \\
(\beta_x)_I\left(\frac{u_{I+1}-u_{I-1}}{2h_x}\right)+(\beta_y)_I\left(\frac{u_{I+n}-u_{I-n}}{2h_y}\right) & + \\
\gamma_I u_I & = f_I
\end{aligned}
$$

$$
d_I u_{I-n}+b_I u_{I-1}+a_I u_I+c_I u_{I+1}+e_I u_{I+n}=f_I \qquad \forall I=1,\ldots,m*n
$$

$$
\begin{aligned}
a_I &= \gamma_I+2k\left(1/h_x^2+1/h_y^2\right)\\
b_I &= \left(-k/h_x^2\right)-(\beta_x)_I/(2h_x)\\
c_I &= \left(-k/h_x^2\right)+(\beta_x)_I/(2h_x)\\
d_I &= \left(-k/h_y^2\right)-(\beta_y)_I/(2h_y)\\
e_I &= \left(-k/h_y^2\right)+(\beta_y)_I/(2h_y)
\end{aligned}
$$

Sistema Resultante - Matriz Pentadiagonal

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & c_1 & & e_1 & & & & & \\
b_2 & a_2 & c_2 & & e_2 & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & & \\
d_{n+1} & & b_{n+1} & a_{n+1} & c_{n+1} & & e_{n+1} & & \\
 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\
 & & d_l & & b_l & a_l & c_l & & e_l \\
 & & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & d_{N-1} & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\
 & & & & & d_N & & b_N & a_N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_l \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ u_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \\ \vdots \\ f_l \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N
\end{bmatrix}
$$

Configuração - 2D - Pentadiagonal

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\
b_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\
& b_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\
c_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\
& c_5 & & b_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\
& & c_6 & & b_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\
& & & c_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\
& & & & c_8 & & b_8 & a_8 & b_8 \\
& & & & & c_9 & & b_9 & a_9
\end{bmatrix}
$$

Condições de Contorno - Valor Prescrito

A função u é conhecida em I, ou seja, $u_I = u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j) = g_I$

Ação:

$a_I \to \bar{a}_I = 1, \quad d_I \to \bar{d}_I = 0, \quad b_I \to \bar{b}_I = 0, \quad c_I \to \bar{c}_I = 0, \quad e_I \to \bar{e}_I = 0$, e $f_I \to \bar{f}_I = g_I$

Representando a linha I do sistema:

$$\begin{array}{ccccccccc} & n-1 & & I-1 & I & I+1 & & I+n & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{n-I} \\ \vdots \\ u_{I-1} \\ u_I \\ u_{I+1} \\ \vdots \\ u_{I+n} \\ \vdots \end{bmatrix} = g_I$$

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

A derivada de u é conhecida em I, ou seja, $-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = h(x_i, y_j) = h_I$
O domínio Ω é retangular, portanto a derivada com relação a normal exterior unitária $(\mathbf{n})$ é definida por:

$$\frac{du}{d\mathbf{n}} = \begin{array}{lll} -\frac{du}{dy} & \text{para} & I = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{du}{dx} & \text{para} & I = n, 2*n, \ldots, m*n \\ \frac{du}{dy} & \text{para} & I = (m-1)*n+1, (m-1)*n+2, \ldots, m*n \\ -\frac{du}{dx} & \text{para} & I = 1, n+1, \ldots, (m-1)*n+1 \end{array}$$

Dependendo da posição I no contorno, uma das variáveis $I-n$, $I-1$, $I+1$, $I+n$ estará fora do domínio, portanto a equação:
$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + a_I u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I$
deverá sofrer as modificações necessárias considerando uma das possibilidades descritas de acima.

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

$I = 1, 2, \ldots, n$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(-\frac{du}{dy}\right)|_I \approx k\left(\frac{u_I - u_{I-n}}{h_y}\right) = h_I \Rightarrow u_{I-n} = u_I - \frac{h_y}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$b_I u_{I-1} + (a_I + d_I)u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I + d_I\frac{h_y}{k}h_I$$

Ação:
$a_I \rightarrow \bar{a}_I = a_I + d_I, \quad d_I \rightarrow \bar{d}_I = 0$ e $f_I \rightarrow \bar{f}_I = f_I + d_I\frac{h_y}{k}h_I$

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

$I = n, 2*n, \ldots, m*n$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(\frac{du}{dx}\right)|_I \approx -k\left(\frac{u_{I+1}-u_I}{h_x}\right) = h_I \Rightarrow u_{I+1} = u_I - \frac{h_x}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + (a_I + c_I)u_I + e_I u_{I+n} = f_I + c_I\frac{h_x}{k}h_I$$

Ação:

$a_I \rightarrow \bar{a}_I = a_I + c_I, \quad c_I \rightarrow \bar{c}_I = 0$ e $f_I \rightarrow \bar{f}_I = f_I + c_I\frac{h_x}{k}h_I$

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

$$I = (m-1)*n+1, (m-1)*n+2, \dots, m*n$$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(\frac{du}{dy}\right)|_I \approx -k\left(\frac{u_{I+n}-u_I}{h_y}\right) = h_I \Rightarrow u_{I+n} = u_I - \frac{h_y}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + (a_I + e_I)u_I + c_I u_{I+1} = f_I + e_I\frac{h_y}{k}h_I$$

Ação:

$a_I \rightarrow \bar{a}_I = a_I + e_I, \quad e_I \rightarrow \bar{e}_I = 0$ e $f_I \rightarrow \bar{f}_I = f_I + e_I\frac{h_y}{k}h_I$

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

$$I = 1, n+1, \ldots, (m-1)*n+1$$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(-\frac{du}{dx}\right)|_I \approx k\left(\frac{u_I - u_{I-1}}{h_x}\right) = h_I \Rightarrow u_{I-1} = u_I - \frac{h_x}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$d_I u_{I-n} + (a_I + b_I)u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I + b_I\frac{h_x}{k}h_I$$

Ação:

$a_I \to \bar{a}_I = a_I + b_I, \quad b_I \to \bar{b}_I = 0$ e $f_I \to \bar{f}_I = f_I + b_I\frac{h_x}{k}h_I$

Condição de Contorno Mista

Um relação linear entre a derivada e a função é conhecida em I, ou seja,
$\alpha_q \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_I + \beta_q u_I = q_I$
O domínio Ω é retangular, portanto a derivada com relação a normal exterior unitária ($\mathbf{n}$) é definida por:

$$\frac{du}{d\mathbf{n}} = \begin{cases} -\frac{du}{dy} \text{ para } & I = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{du}{dx} \text{ para } & I = n, 2*n, \ldots, m*n \\ \frac{du}{dy} \text{ para } & I = (m-1)*n+1, (m-1)*n+2, \ldots, m*n \\ -\frac{du}{dx} \text{ para } & I = 1, n+1, \ldots, (m-1)*n+1 \end{cases}$$

Dependendo da posição I no contorno, uma das variáveis $I-n$, $I-1$, $I+1$, $I+n$ estará fora do domínio, portanto a equação:
$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + a_I u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I$
deverá sofrer as modificações necessárias considerando uma das possibilidades descritas acima.

Condição de Contorno Mista para $I = 1, 2, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\alpha_q \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)_I + \beta_q u_I &= q_I \\
\text{Como } \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_I &\approx \frac{u_I - u_{I-n}}{h_y} \\
u_{I-n} &= \left(1 - \frac{h_y \beta_q}{\alpha_q} \right) u_I + \frac{h_y q_I}{\alpha_q}
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação I:

$$
b_I u_{I-1} + \left(a_I + d_I \left(1 - \frac{h_y \beta_q}{\alpha_q} \right) \right) u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I - d_I \frac{h_y q_I}{\alpha_q} q_I
$$

Ação:

$a_I \to \bar{a}_I = a_I + d_I \left(1 - \frac{h_y \beta_q}{\alpha_q} \right)$, $d_I \to \bar{d}_I = 0$ e $f_I \to \bar{f}_I = f_I - d_I \frac{h_y q_I}{\alpha_q} q_I$

Condição de Contorno Mista para $I = n, 2*n, \ldots, m*n$

$$\begin{aligned} \alpha_q \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_I + \beta_q u_I &= q_I \\ \text{Como } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_I &\approx \frac{u_{I+1} - u_I}{h_x} \\ u_{I+1} &= \left(1 - \frac{h_x \beta_q}{\alpha_q}\right) u_I + \frac{h_x q_I}{\alpha_q} \end{aligned}$$

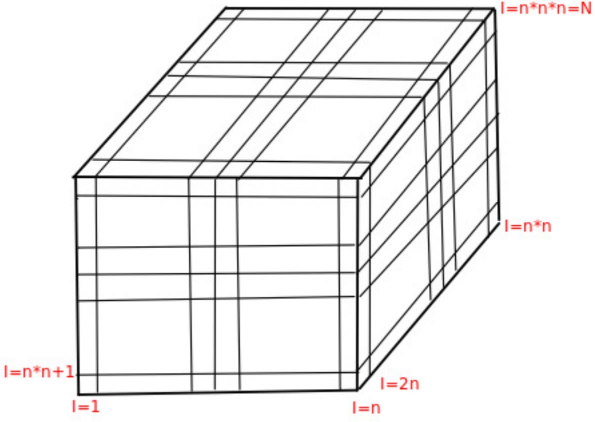
Substituindo na equação I:

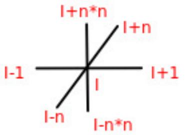
$$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + \left(a_I + c_I \left(1 - \frac{h_x \beta_q}{\alpha_q}\right)\right) u_I + e_I u_{I+n} = f_I - c_I \frac{h_x q_I}{\alpha_q}$$

Ação:

$a_I \to \bar{a}_I = a_I + c_I \left(1 - \frac{h_x \beta_q}{\alpha_q}\right)$, $\quad c_I \to \bar{c}_I = 0$ e $f_I \to \bar{f}_I = f_I - c_I \frac{h_x q_I}{\alpha_q}$

Configuração - 3D





Configuração - 3D - Heptadiagonal

6	-1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	-0	0	-0	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	6	-1	0	-1	0	0	0	0	-0	-1	-0	-0	-0	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	6	0	0	-1	0	0	0	0	-0	-1	0	-0	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	6	-1	0	-1	0	0	-0	-0	0	-1	-0	0	-0	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	-1	6	-1	0	-1	0	-0	-0	-0	-0	-1	-0	-0	-0	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	-1	6	0	0	-1	0	-0	-0	0	-0	-1	0	-0	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	0	0	6	-1	0	0	0	0	-0	-0	0	-1	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	0	-1	6	-1	0	0	0	-0	-0	-0	-0	-1	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0	-1	6	0	0	0	0	-0	-0	0	-0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-0	0	-0	-0	0	0	0	0	6	-1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	-0	0	-0	-0	0	0	0	0
-0	-1	-0	-0	-0	-0	0	0	0	-1	6	-1	0	-1	0	0	0	0	-0	-1	-0	-0	-0	-0	0	0	0
0	-0	-1	0	-0	-0	0	0	0	0	-1	6	0	0	-1	0	0	0	0	-0	-1	0	-0	-0	0	0	0
-0	-0	0	-1	-0	0	-0	-0	0	-1	0	0	6	-1	0	-1	0	0	-0	-0	0	-1	-0	0	-0	-0	0
-0	-0	-0	-0	-1	-0	-0	-0	-0	0	-1	0	-1	6	-1	0	-1	0	-0	-0	-0	-0	-1	-0	-0	-0	-0
0	-0	-0	0	-0	-1	0	-0	-0	0	0	-1	0	-1	6	0	0	-1	0	-0	-0	0	-0	-1	0	-0	-0
0	0	0	-0	-0	0	-1	-0	0	0	0	0	-1	0	0	6	-1	0	0	0	0	-0	-0	0	-1	-0	0
0	0	0	-0	-0	-0	-0	-1	-0	0	0	0	0	-1	0	-1	6	-1	0	0	0	-0	-0	-0	-0	-1	-0
0	0	0	0	-0	-0	0	-0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	6	0	0	0	0	-0	-0	0	-0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-0	0	-0	-0	0	0	0	0	6	-1	0	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0	-1	-0	-0	-0	-0	0	0	0	-1	6	-1	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0	-1	0	-0	-0	0	0	0	0	-1	6	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0	-0	0	-1	-0	0	-0	-0	0	-1	0	0	6	-1	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0	-0	-0	-0	-1	-0	-0	-0	-0	0	-1	0	-1	6	-1	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0	-0	0	-0	-1	0	-0	-0	0	0	-1	0	-1	6	0	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0	-0	0	-1	-0	0	0	0	0	-1	0	0	6	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0	-0	-0	-0	-1	-0	0	0	0	0	-1	0	-1	6	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0	-0	0	-0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	6

Configuração - 3D - Heptadiagonal - Bloco Tridiagonal

$$\left[\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
d1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & d1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & d1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & d1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & d1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & d2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & d2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & d3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & d3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d3 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & d3
\end{array}\right]$$