Lista de Algoritmos Numéricos I
Equações Diferenciais Ordinárias - Runge-Kutta

Obs: Utilize três casas decimais em todas as questões.

1. Deduza a expressão do método de Euler, mostre geometricamente um passo e escreva as expressões para os erros local e global.

2. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{\sqrt{x}} &= 0 \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

   Encontre a solução aproximada no intervalo [1,1.4], usando o método de Euler com $h = 0.2$.

3. As equações de um pêndulo são dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2w\,\text{sen}(\phi\dot{y}) + k^2x &= 0 \\ \ddot{y} - 2w\,\text{sen}(\phi\dot{x}) + k^2y &= 0 \end{aligned}$$

   com condições iniciais

$$\begin{aligned} x(0) = 1.5, \quad \frac{dx}{dt}(0) &= 0 \\ y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) &= 0 \end{aligned}$$

   onde w, ϕ, k são constantes conhecidas e $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Reescreva as equações como um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem e escreva a expressão da sequência gerada pelo método de Euler para o sistema resultante.

4. Calcule o número de iterações necessárias para obter uma aproximação para a solução do problema de valor inicial,

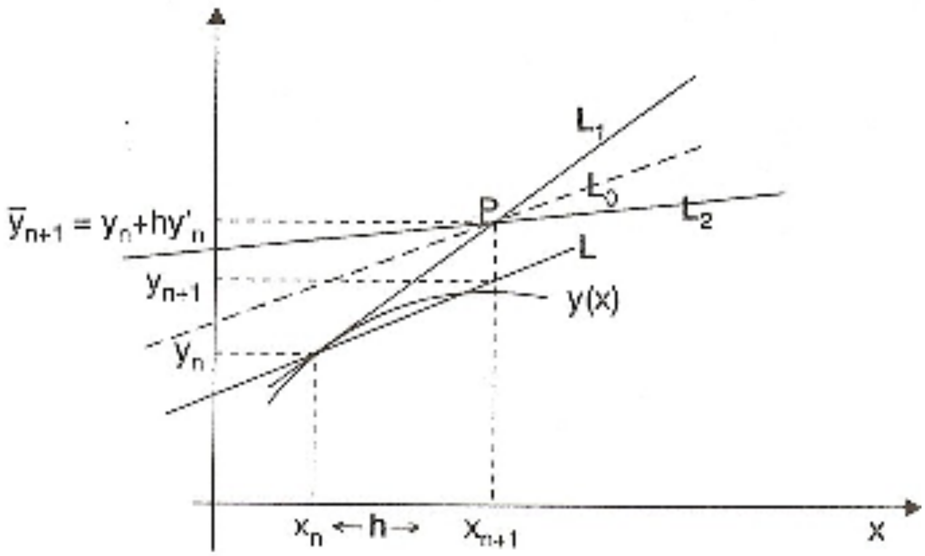
$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y+3}, \tag{1}$$
$$y(2) = 1 \tag{2}$$

   no ponto $x = 4$ com $h = 0.01$. Calcule y(2.02) com $h = 0.01$ utilizando o método de Euler Aperfeiçoado cujas constantes estão mostradas na tabela abaixo. O que se pode dizer a respeito do tamanho dos erros local e global cometidos?

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

5. Deduza o método de Euler Melhorado a partir da sua interpretação geométrica dada na figura abaixo: a solução em x_{n+1} está sobre a reta L que passa pelo ponto (x_n, y_n) e tem inclinação igual a média das inclinações das retas L_1 e L_2. A reta L_1 é tangente a curva em (x_n, y_n) e a reta L_2

tem coeficiente angular igual $f(P)$, P mostrado no gráfico.



6. Considere o problema de valor inicial de segunda ordem,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y &= 0 \\ y(2) &= 1 \\ \frac{dy}{dx}(2) &= 3 \end{aligned}$$

Calcule uma aproximação para $\frac{dy}{dx}(2.1)$ pelo método de Euler com $h = 0.05$.

7. Indique como resolver o sistema de ODE de ordem três

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 y_3 \\ y_2' &= -y_1 + x y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_2 \end{aligned}$$

com condições iniciais $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$, $y_3(0) = 2$, no intervalo $[0, 2]$ e $m = 100$ (o número de subintervalos em $[0, 2]$, utilizando o método de Euler). Ou seja, obtenha as expressões para o método de Euler e indique o que temos que fazer.