Integração Numérica

Lucia Catabriga e Andréa Maria Pedrosa Valli

Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

Integração Numérica

1. Fórmulas de Newton-Cotes
   - Regra dos Trapézios
   - Regra 1/3 de Simpson
2. Fórmulas de Gauss-Legendre

Fórmulas de Newton-Cotes:

$$f(x) = p_m(x) + E_m(x)$$

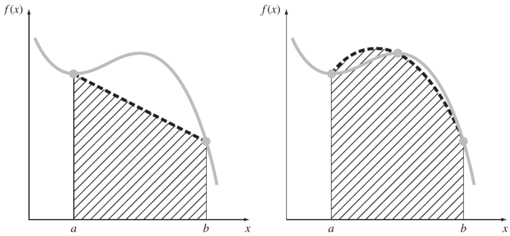
onde $\quad p_m(x) =$ polinômio interpolador de grau m

$\quad E_m(x) =$ erro na interpolação

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_m(x)dx + \int_a^b E_m(x)dx$$

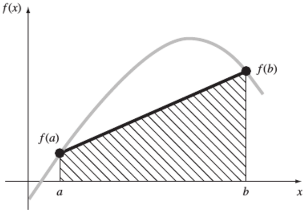
Fórmulas:

1. A regra dos Trapézios $(m = 1)$
2. A regra 1/3 de Simpson $(m = 2)$

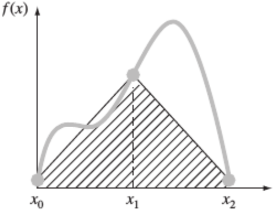


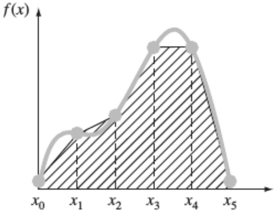
A regra dos Trapézios usando um subintervalo em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$



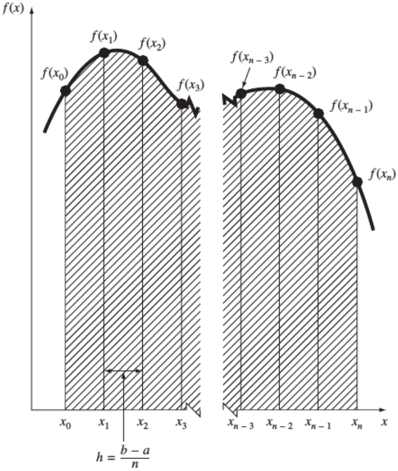
A regra dos Trapézios usando mais de um subintervalo em $[a, b]$:





A regra dos Trapézios usando n subintervalos em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\,p_1(x) + E_1(x)\,)\,dx$$



$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_1(x)\,dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} + f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) dx \\ &= \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} E_1(x)\,dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx \\ \text{(pelo TVI)}^1 &= \frac{f''(\xi_i)}{2}\left[\frac{-(x_{i+1}-x_i)^3}{6}\right] \\ &= -\frac{f''(\xi_i)}{12}(x_{i+1}-x_i)^3, \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx &= \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i) \\ &- \frac{f''(\xi_i)}{12}(x_{i+1}-x_i)^3, \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})\end{aligned}$$

[1]Se f'' é continua, $\exists\ \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ tal que

Vamos assumir que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \\
&= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&= \frac{h}{2}[\, f(x_0) + 2\,(\, f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\,)\, + f(x_n)\,]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n)$$

onde

$$A_0 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = h$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b E_1(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{f''(\xi_i)}{12}(x_{i+1}-x_i)^3 \\
&= -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}) \\
\text{(TVI)} &= -\frac{h^3}{12} f''(\xi)\sum_{i=0}^{n-1} 1, \quad \xi \in (a, b) \\
&= -\frac{nh^3}{12} f''(\xi) \\
&= -\frac{h^2}{12}(b-a)\, f''(\xi)
\end{aligned}
$$

Teorema do Valor Intermediário (TVI): $f''(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $min \leq c \leq max \Rightarrow \exists$ pelo menos um $\xi \in [a, b]$ tal que $f''(\xi) = c$.

A regra dos Trapézios:

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n) - \frac{nh^3}{12} f''(\xi)$$

onde

$$A_0 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = h$$

Limitante para o erro na regra dos Trapézios:

$$|E_T| \leq \frac{nh^3}{12} M_2, \quad \text{onde} \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Observação: a regra dos Trapézios integra sem erros polinômios de grau menor ou igual a 1. Ex: $f(x) = x$ em $[0, 1]$

$$\int_0^1 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Basta usar apenas um subintervalo em $[0, 1]$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1 \Rightarrow h = 1$:

$$\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2}$$

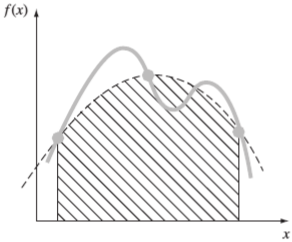
Exemplo: calcule uma aproximação para integral abaixo usando 4 e 8 subintervalos, calcule o erro exato e estime o erro cometido.

$$\int_1^2 e^x\, dx = e^2 - e^1 = 4.670774$$

A regra 1/3 de Simpson usando dois subintervalo em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\, p_2(x) + E_2(x)\,)dx$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \quad &\approx \quad \int_{x_0}^{x_2} (\, f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \\ &\qquad f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,)\,dx \\ &= \quad \frac{h}{3}(\, f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\,)\end{aligned}$$



$$\int_{x_0}^{x_2} E_2(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,dx = 0$$

Considere o próximo termo na série de Taylor para calcular o erro:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x_2} \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)\,dx \\ (TVI) \quad &= \quad -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_2) \end{aligned}$$

Somando os erros e assumindo um número par de divisões (n par) em $[a, b]$, temos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_S \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n/2} -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_k), \quad \xi_k \in (x_{2k-2}, x_{2k}) \\ (TVI) \quad &= \quad -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \sum_{k=1}^{n/2} 1, \quad \xi \in (a, b) \\ &= \quad -\frac{nh^5}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^4}{180}(b-a)\, f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

Vamos assumir que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Então,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\, dx \\
&\approx \sum_{k=1}^{n/2} \frac{h}{3} \left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}) \right) \\
&= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \\
&\qquad + \cdots + f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\
&= \frac{h}{3} (f(x_0) + f(x_n) + \\
&\qquad + 4 \left[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) \right] + \\
&\qquad + 2 \left[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2}) \right])
\end{aligned}
$$

A regra 1/3 de Simpson

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n) - \frac{nh^5}{180} f^{(4)}(\xi)$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= A_n = h/3 \\ A_1 &= A_3 = \cdots = A_{n-1} = 4h/3 \\ A_2 &= A_4 = \cdots = A_{n-2} = 2h/3 \end{aligned}$$

Limitante para o erro na regra 1/3 de Simpson:

$$|E_S| \leq \frac{nh^5}{180} M_4, \quad \text{onde} \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Observação: a regra 1/3 de Simpson integra sem erros polinômios de grau menor ou igual a 3. Ex: $f(x) = x^3$ em $[0, 1]$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3\,dx &= \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} \\
&= \frac{1/2}{3}(f(0) + 4f(0.5) + f(1)), \quad (h = 1/2) \\
&= \frac{1}{6}(4(\frac{1}{2})^3 + 1) = \frac{1}{6}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Exemplo: calcule uma aproximação para integral abaixo usando 4 e 8 subintervalos, calcule o erro exato e estime o erro cometido.

$$\int_1^2 e^x\,dx = e^2 - e^1 = 4.670774$$

Idéia do método de Quadratura Gaussiana: Vamos considerar inicialmente integrais definidas no intervalo padrão $t \in [-1, 1]$: determinar $t_1, t_2, \cdots, t_n, A_1, A_2, \cdots, A_n$ de forma que a integral seja exata para polinômios de grau $\leq 2n - 1$.

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx A_1 g(t_1) + A_2 g(t_2) + \cdots + A_n g(t_n)$$

Exemplo: $n = 2$ (2 pontos de integração). Fórmula exata para polinômios de grau menores ou iguais a $2n - 1 = 3$:

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx A_1 g(t_1) + A_2 g(t_2)$$

$$\begin{aligned} 2 &= \int_{-1}^{1} 1dt = A_1 + A_2 \\ 0 &= \int_{-1}^{1} tdt = A_1 t_1 + A_2 t_2 \\ \frac{2}{3} &= \int_{-1}^{1} t^2 dt = A_1 (t_1)^2 + A_2 (t_2)^2 \\ 0 &= \int_{-1}^{1} t^3 dt = A_1 (t_1)^3 + A_2 (t_2)^3 \end{aligned}$$

Sistema de equações não-linear com 4 equações e 4 incógnitas. Resolvendo:

$$t_2/t_1 = \pm\sqrt{3}/3 \qquad \text{(pontos da quadratura)}$$
$$A_1 = A_2 = 1 \qquad \text{(pesos da quadratura)}$$

Exemplo: calcular uma aproximação para a integral abaixo usando quadratura Guaussiana com 2 pontos.

$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx = e^1 - e^{-1} = 2.350402$$

Tabela de pontos e pesos da quadratura Gaussiana

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	2; 1	±0,57735 02691 89626	1
3	2	0	0,88888 88888 88889
	3; 1	±0,77459 66692 41483	0,55555 55555 55556
4	3; 2	±0,33998 10435 84856	0,65214 51548 62546
	4; 1	±0,86113 63115 94053	0,34785 48451 37454
5	3	0	0,56888 88888 88889
	4; 2	±0,53846 93101 05683	0,47862 86704 99366
	5, 1	±0,90617 98459 38664	0,23692 68850 56189
6	4; 3	±0,23861 91860 83197	0,46791 39345 72691
	5; 2	±0,66120 93864 66265	0,36076 15730 48139
	6; 1	±0,93246 95142 03152	0,17132 44923 79170
7	4	0	0,41795 91836 73469
	5; 3	±0,40584 51513 77397	0,38183 00505 05119
	6; 2	±0,74153 11855 99394	0,27970 53914 89277
	7; 1	±0,94910 79123 42759	0,12948 49661 68870
8	5; 4	±0,18343 46424 95650	0,36268 37833 78362
	6; 3	±0,52553 24099 16329	0,31370 66458 77887
	7; 2	±0,79666 64774 13627	0,22238 10344 53374
	8; 1	±0,96028 98564 97536	0,10122 85362 90376

Mudança de variável de $x \in [a, b]$ e $t \in [-1, 1]$:

$$\frac{x - \frac{a+b}{2}}{t - 0} = \frac{b-a}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{b-a}{2}dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt, \quad g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)$$

$$\approx \frac{b-a}{2}\left(A_1 g(t_1) + A_2 g(t_2) + \cdots + A_n g(t_n) \right)$$

Exemplo: calcular uma aproximação para a integral abaixo usando quadratura Gaussiana com dois pontos.

$$\int_1^2 e^x \, dx = e^2 - e^1 = 4.670774$$

Limitante Superior do Erro cometido na Quadratura Gaussiana

$$
\begin{aligned}
\|E_{QG}\| &\leq \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)} M_{2n} \\
M_{2n} &= max_{a\leq x\leq b}\|f^{(2n)}(x)\|
\end{aligned}
$$

Exercícios Sugeridos - Referência [1]

- 5.1 (a), (b) e (d)
- 5.2
- 5.3
- 5.6
- 5.7
- 5.11
- 5.12
- 5.36
- 5.39
- 5.40

Bibliografia Básica

[1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.