Sistemas Lineares
Métodos Diretos
Métodos Iterativos Estacionários

Lucia Catabriga e Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Otimização e Modelagem Computacional
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

Métodos Diretos

1. Introdução
2. Substituição Regressiva
3. Eliminação de Gauss
4. Pivoteamento Parcial
5. Fatoração LU
6. Aplicações
7. Matrizes Esparsas x Métodos Diretos

Introdução

- Encontra a solução exata a menos de erros de ponto flutuante.
- A idéia dos métodos é transformar o sistema em um sistema trivial (sistema triangular).
- O número de operações de ponto flutuante (complexidade) é em torno de n^3.
- Os métodos diretos não são eficientes quando a matriz dos coeficientes é uma matriz esparsa (muitos elementos iguais a zero) e de grande porte.

Sistema linear $n \times n$:

$$
\begin{array}{ccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

a_{ij} = coeficientes, b_j = constantes, x_j = variáveis $(i, j = 1, \cdots, n)$
Na forma matricial $Ax = b$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Sistema triangular superior $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Assuma que o sistema tem solução única: $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \cdots, n$.

Sistema triangular superior $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Assuma que o sistema tem solução única: $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, \cdots, n$.

Solução - substituição regressiva:

$$\begin{aligned} a_{nn} x_n &= b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\ \text{linha i} \ \Rightarrow \ x_i &= \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \end{aligned}$$

Lab⊛tim Laboratório de Otimização

Algoritmo para a substituição regressiva: $x_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$

Data: A,b,n
Result: x
for *i=n,1,-1* **do**
    soma = b[i];
    for *j=i+1,n,1* **do**
        soma = soma - a[i][j] ∗ x[j];
    end
    x[i] = soma/a[i][i];
end

Esforço computacional (№de operações (+,-,x,/) ou flops):

divisão: n

subtração e multiplicação: $2\sum\limits_{j=1}^{n-1} j = 2n(n-1)/2$

total $= n^2$

Idéia do método direto para solução de um sistema linear:

$$Ax = b \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

operações de linhas elementares

onde $\tilde{A}$ é uma matriz triangular superior.

Idéia do método direto para solução de um sistema linear:

$$Ax = b \quad \underset{\text{operações de linhas elementares}}{\Longrightarrow} \quad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

onde $\tilde{A}$ é uma matriz triangular superior.

Operações de linhas elementares:

- trocar a ordem de duas equações;
- multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- somar uma equação à outra.

Observação: A eliminação deve ser feita de forma sistemática, ou seja, usando uma sequência de operações elementares de modo a transformar um sistema linear em um outro equivalente, onde a matriz é triangular superior.

Exemplo: sistema 4×4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right] \qquad \text{solução exata: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: sistema 4×4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right] \qquad \text{solução exata: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro Passo: Eliminar os coeficientes da primeira coluna abaixo da diagonal:

Exemplo: sistema 4 × 4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right] \qquad \text{solução exata: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro Passo: Eliminar os coeficientes da primeira coluna abaixo da diagonal: pivô: $a_{11} = -3$
multiplicadores: $m_{21} = -7/3 = -2.333$, $m_{31} = 2/3 = 0.667$, $m_{41} = -1/3 = -0.333$
$\Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - (m_{21})L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - (m_{31})L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - (m_{41})L_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ -2 & -2.336 & 2.334 & 3.999 & 3.998 \\ 1 & 0.664 & 5.334 & 2.999 & 8.998 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ \color{red}{7} & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ \color{red}{-2} & -2.336 & 2.334 & 3.999 & 3.998 \\ \color{red}{1} & 0.664 & 5.334 & 2.999 & 8.998 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ \color{red}{7} & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ \color{red}{-2} & -2.336 & 2.334 & 3.999 & 3.998 \\ \color{red}{1} & 0.664 & 5.334 & 2.999 & 8.998 \end{array}\right]$$

Segundo Passo: Eliminar os coeficientes da segunda coluna abaixo da diagonal

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ -2 & -2.336 & 2.334 & 3.999 & 3.998 \\ 1 & 0.664 & 5.334 & 2.999 & 8.998 \end{array}\right]$$

Segundo Passo: Eliminar os coeficientes da segunda coluna abaixo da diagonal

pivô: $a_{22} = 17.664$

multiplicadores: $m_{32} = -2.336/17.664 = -0.132$, $m_{42} = 0.664/17.664 = 0.038$

$\Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - (m_{32})L_2,\ L_4 \leftarrow L_4 - (m_{42})L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 & 7.298 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & 2.619 & 8.048 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 & 7.298 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & 2.619 & 8.048 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 & 7.298 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & 2.619 & 8.048 \end{array}\right]$$

Terceiro Passo: Eliminar os coeficientes da terceira coluna abaixo da diagonal

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.998 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 & 7.298 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & 2.619 & 8.048 \end{array}\right]$$

Terceiro Passo: Eliminar os coeficientes da terceira coluna abaixo da diagonal

pivô: $a_{33} = 1.982$

multiplicadores: $m_{43} = 5.434/1.982 = 2.742$

Operações: $L_4 \leftarrow L_4 - (m_{43})L_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 & 24.999 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 & 7.298 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & -11.966 & -11.963 \end{array}\right]$$

Substituição Regressiva:

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & -11.966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 24.998 \\ 7.298 \\ -11.963 \end{bmatrix}$$

Substituição Regressiva:

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & 17.664 & -2.666 & 9.999 \\ -2 & -2.336 & 1.982 & 5.319 \\ 1 & 0.664 & 5.435 & -11.966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 24.998 \\ 7.298 \\ -11.963 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -11.966\, x_4 = -11.963 \Rightarrow x_4 &= 1.000 \\ 1.982x_3 + 5.319x_4 = 7.298 \Rightarrow x_3 &= 0.998 \\ 17.664x_2 - 2.666x_3 + 9.999x_4 = 24.998 \Rightarrow x_2 &= 1.000 \\ -3x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6 \Rightarrow x_1 &= 1.001 \end{aligned}$$

Cálculo do Resíduo: $R = b - A\,x$

$$R = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.001 \\ 1.000 \\ 0.998 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001 \\ -0.003 \\ 0.004 \\ 0.011 \end{bmatrix}$$

Observação: A solução é exata a menos dos erros de ponto flutuante. Sendo assim, o resíduo tem que ser bem pequeno, em torno do número de casas decimais utilizadas para os cálculos.

Algoritmo para a Eliminação de Gauss:

Passo k: Eliminar os coeficientes da k-ésima coluna abaixo da diagonal $(1 \leq k \leq n-1)$

Operação sobre a Linha i:

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ik} L_k \text{ onde } m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \quad k+1 \leq i \leq n$$

$$\Rightarrow a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}, \quad k+1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k$$

```
Data: A,b,n
Result: x
for k=1,n-1 do
    for i=k+1,n do
        fator = a[i][k] / a[k][k];
        for j=k+1,n do
            a[i][j] = a[i][j] - fator * a[k][j];
        end
        b[i] = b[i] - fator * b[k]
    end
end
```

Esforço computacional:

adição e subtração: $n^3/3 + O(n)$

multiplicação e divisão: $n^3/3 + O(n^2)$

total $= 2n^3/3 + O(n^2)$

Obs: $O(m^n)$ significa "termos de ordem m^n e menores".

Esporço Computacional:
Eliminação Progressiva: $2n^3/3 + O(n^2)$
Substituição Regressiva: n^2

n	# Elim.	# Subst.	# Flops	$2n^3/3$	% Elim.
10	705	100	805	667	87.58%
100	671550	10000	681550	666667	98.53%
1000	6.67×10^8	1×10^6	6.68×10^8	6.67×10^8	99.85%

- O tempo de computação cresce bastante à medida que o sistema fica maior. A quantidade de flops cresce quase três ordens de grandeza para cada aumento na ordem de grandeza da dimensão;
- A maior parte do esforço vem da parte da eliminação. Esforços para melhorar o algoritmo devem se concentrar neste passo.

Variantes do Método de Gauss

Gauss-Jordan algoritmo: $[A|b] \implies [I|x]$,

onde I é a matriz identidade e x é a solução do sistema. Neste método o esforço computacional é $O(n^3)$, ou seja, aproximadamente 50% mais operações que a eliminação de Gauss ingênua.

Esforço Computacional:

- Regra de Cramer: $O(n!)$
- Gauss-Jordan: $O(n^3)$
- Eliminação de Gauss ingênua: $O(2n^3/3)$

Obs: a regra de Cramer é inviável computacionalmente quando n é grande. Observe que a regra de Cramer envolve o cálculo de determinantes.

Problemas com a Eliminação de Gauss ingênua

1. Divisão por zero

   Exemplo: solução exata $(1, 1, 1)^T$

$$
\begin{aligned}
2x_2 + 3x_3 &= 5 \\
x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\
2x_1 + x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Problemas com a Eliminação de Gauss ingênua

1. Divisão por zero

   Exemplo: solução exata $(1, 1, 1)^T$

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

   Solução $\rightarrow$ trocar L_1 com L_2

2. Erros de arredondamento

   Exemplo: solução exata $(1/3, 2/3)^T$

$$\begin{aligned} 0.0003x_1 + 3x_2 &= 2.0001 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 3 & 2.0001 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{0.0003} L_1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 3 & 2.0001 \\ 0 & -9999 & -6666 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.6666 = 2/3 \\ x_1 &= \frac{2.0001 - 3(x_2)}{0.0003} \end{aligned}$$

Tabela: Resultado muito sensível à precisão.

№de Dígitos	x_2	x_1	% Error relativo x_1
3	0.667	-3.33	1099
4	0.6667	0.0000	100
5	0.66667	0.30000	10
6	0.666667	0.330000	1
7	0.6666667	0.3330000	0.1

Técnicas para melhorar a solução:

- Usar mais dígitos significativos, ou seja, aumentar a precisão.
- Usar a estratégia de pivoteamento parcial.

Pivoteamento Parcial:

1. no início de cada etapa k, $1 \leq k \leq n-1$, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes a_{ik}, $k \leq i \leq n$,
2. trocar as linhas k e i, se for necessário.

Exemplo: solução exata $(1/3, 2/3)^T$

$$\begin{aligned} 0.0003x_1 + 3x_2 &= 2.0001 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0.0003 & 3 & | & 2.0001 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{0.0003}{1} L_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2.9997 & | & 1.9998 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.6666 = 2/3 \\ x_1 &= 1 - x_2 \end{aligned}$$

Tabela: Resultado usando pivoteamento parcial.

№de Dígitos	x_2	x_1	% Error relativo x_1
3	0.667	0.333	0.1
4	0.6667	0.3333	0.01
5	0.66667	0.33333	0.001
6	0.666667	0.333333	0.0001
7	0.6666667	0.3333333	0.00001

Pseudocódigo para implementar o pivoteamento parcial [2]:

```
p = k
maior = |a_{k,k}|
DOFOR ii = k+1, n
  dummy = |a_{ii,k}|
  IF (dummy > maior )
     maior = dummy
     p = ii
  END IF
END DO
IF (p ≠ k)
  DOFOR jj = k, n
     dummy = a_{p,jj}
     a_{p,jj} = a_{k,jj}
     a_{k,jj} = dummy
  END DO
  dummy = b_p
  b_p = b_k
  b_k = dummy
END IF
```

FIGURA 9.5

Exemplo com Pivoteamento: sistema 4×4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right] \quad \text{solução exata: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro Passo: Escolher o pivô (a_{11}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da primeira coluna abaixo da diagonal

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - (-3/7)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (-2/7)L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - (1/7)L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & 1.571 & 6.857 & 11.143 \\ 1 & -1.857 & 5.714 & 1.571 & 5.429 \end{array}\right]$$

Segundo Passo: Escolher o pivô (a_{22}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da segunda coluna abaixo da diagonal

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & 1.571 & 6.857 & 11.143 \\ 1 & -1.857 & 5.714 & 1.571 & 5.429 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - (2.714/7.571)L_2$$
$$L_4 \leftarrow L_4 - (-1.857/7.571)L_2$$

Lab tim Laboratório de Otimização

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & 1.981 & 5.321 & 7.302 \\ 1 & -1.875 & 5.434 & 2.623 & 8.057 \end{array}\right]$$

Terceiro Passo: Escolher o pivô (a_{33}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da terceira coluna abaixo da diagonal

$$L_3 \longleftrightarrow L_4 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & 5.434 & 2.623 & 8.057 \\ 1 & -1.857 & 1.981 & 5.321 & 7.302 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow L_4 \leftarrow L_4 - (1.981/5.434)L_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & 5.434 & 2.623 & 8.057 \\ 1 & -1.857 & 1.981 & 4.365 & 4.364 \end{array}\right]$$

Substituição Regressiva:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 7.571 & -1.143 & 4.286 & 10.714 \\ -2 & 2.714 & 5.434 & 2.623 & 8.057 \\ 1 & -1.857 & 1.981 & 4.365 & 4.364 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 4.365x_4 = 4.364 \Rightarrow x_4 &= 1.000 \\ 5.434x_3 + 2.623x_4 = 8.057 \Rightarrow x_3 &= 1.000 \\ 7.571x_2 - 1.143x_3 + 4.286x_4 = 10.714 \Rightarrow x_2 &= 1.000 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 11 \Rightarrow x_1 &= 1.000 \end{aligned}$$

Cálculo do Resíduo: $R = b - Ax$

$$R = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observação: Na eliminação de Gauss com pivoteamento todos os multiplicadores são em módulo menores ou iguais a 1.

A Ideia Básica da Decomposição LU

Seja $Ax = b$, supor que exista:

- L matriz triangular inferior com $l_{ii} = 1$
- U matriz triangular superior

tal que:

$$A = LU$$

$$LUx = b$$

A Ideia Básica da Decomposição LU

Seja $Ax = b$, supor que exista:

- L matriz triangular inferior com $l_{ii} = 1$
- U matriz triangular superior

tal que:

$$A = LU$$

$$\begin{aligned} LUx &= b \\ Ly &= b \qquad (1) \\ Ux &= y \qquad (2) \end{aligned}$$

A Ideia Básica da Decomposição LU

Seja $Ax = b$, supor que exista:

- L matriz triangular inferior com $l_{ii} = 1$
- U matriz triangular superior

tal que:

$$A = LU$$

$$\begin{aligned} LUx &= b \\ Ly &= b \qquad (1) \\ Ux &= y \qquad (2) \end{aligned}$$

Como encontrar os fatores L e U?

Voltando ao Exemplo 1:
Seja L matriz triangular inferior tal que $l_{ij} = m_{ij}$ para $i > j$ e $l_{ii} = 1$ e U a matriz triangular superior resultante da Eliminação de Gauss:

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & & & \\ -2.333 & 1.0 & & \\ 0.667 & -0.132 & 1.0 & \\ -0.333 & 0.038 & 2.742 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ & 17.664 & -2.666 & 9.999 \\ & & 1.982 & 5.319 \\ & & & -11.966 \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} -3.000 & 8.000 & -2.000 & 3.000 \\ 6.999 & -1.000 & 2.000 & 3.000 \\ -2.001 & 3.004 & 1.000 & 6.000 \\ 0.999 & -1.993 & 5.999 & 2.000 \end{bmatrix} \approx A$$

Voltando ao Exemplo 2:

Seja L matriz triangular inferior tal que $l_{ij} = m_{ij}$ para $i > j$ e $l_{ii} = 1$ e U a matriz triangular superior resultante da Eliminação de Gauss:

$$L = \begin{bmatrix} 1.000 & & & \\ -0.429 & 1.000 & & \\ 0.143 & -0.245 & 1.000 & \\ -0.286 & 0.358 & 0.365 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 7.000 & -1.000 & 2.000 & 3.000 \\ & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ & & 5.434 & 2.623 \\ & & & 4.365 \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 8 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} = PA, \text{ sendo } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU [2]:

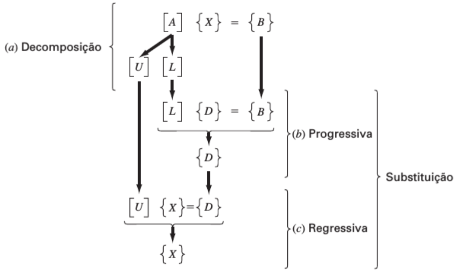
$$[A] \rightarrow [L][U]$$

onde

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

e

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix}$$



- Processo de Substituição:

$$Ax = b$$

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb$$

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

$$Ux = y$$

Lab tim Laboratório de Otimização

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

$$Ux = y, \quad \text{então} \quad Ly = Pb$$

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$
$$Ux = y, \;\; \text{então} \;\; Ly = Pb$$

1. $Ly = Pb$, Substituição Progressiva e determino y;

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

$$Ux = y, \quad \text{então} \quad Ly = Pb$$

1. $L\,y \;= P\,b$, Substituição Progressiva e determino y;
2. $U\,x \;= y$, Substituição Regressiva e determino a solução x.

- Processo de Substituição:

$$A\,x = b \longrightarrow P A\,x = P b \longrightarrow L U\,x = Pb$$

$$U\,x = y, \quad \text{então} \quad L\,y = Pb$$

1. $L\,y = P\,b$, Substituição Progressiva e determino y;
2. $U\,x = y$, Substituição Regressiva e determino a solução x.

Exemplo 2×2: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$, solução exata $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$
$$Ux = y, \quad \text{então} \quad Ly = Pb$$

1. $Ly = Pb$, Substituição Progressiva e determino y;
2. $Ux = y$, Substituição Regressiva e determino a solução x.

Exemplo 2×2: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$, solução exata $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- Processo de Substituição:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$
$$Ux = y, \quad \text{então} \quad Ly = Pb$$

1. $Ly = Pb$, Substituição Progressiva e determino y;
2. $Ux = y$, Substituição Regressiva e determino a solução x.

Exemplo 2×2: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$, solução exata $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- Processo de Substituição:

$$A\,x = b \longrightarrow P A\,x = P b \longrightarrow L U\,x = Pb$$

$$U\,x = y, \quad \text{então} \quad L\,y = Pb$$

1. $L\,y = P\,b$, Substituição Progressiva e determino y;
2. $U\,x = y$, Substituição Regressiva e determino a solução x.

Exemplo 2×2: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$, solução exata $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- Processo de Substituição:

$$A x = b \longrightarrow P A x = P b \longrightarrow L U x = P b$$

$$U x = y, \quad \text{então} \quad L y = P b$$

1. $L y = P b$, Substituição Progressiva e determino y;
2. $U x = y$, Substituição Regressiva e determino a solução x.

Exemplo 2×2: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$, solução exata $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo do Determinante

- Cálculo do determinante: $PA = LU$

Cálculo do Determinante

- Cálculo do determinante: $PA = LU \longrightarrow det(PA) = det(LU)$,

Cálculo do Determinante

- Cálculo do determinante: $PA = LU \longrightarrow det(PA) = det(LU)$, então, pela propriedade de determinantes,

$$det(A) = \frac{det(L)det(U)}{det(P)},$$

onde

$$\begin{aligned} det(L) &= 1 \\ det(U) &= \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \quad \text{(produto dos pivôs)} \\ det(P) &= (-1)^t \quad \text{onde } t \text{ é o número de permutações} \end{aligned}$$

Cálculo do Determinante

- Cálculo do determinante: $PA = LU \longrightarrow det(PA) = det(LU)$, então, pela propriedade de determinantes,

$$det(A) = \frac{det(L)det(U)}{det(P)},$$

onde

$$\begin{aligned} det(L) &= 1 \\ det(U) &= \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \quad \text{(produto dos pivôs)} \\ det(P) &= (-1)^t \quad \text{onde } t \text{ é o número de permutações} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Cálculo da inversa

$$[A]\,[A]^{-1} = [A]^{-1}\,[A] = [I]$$

Lab⊗tim
Laboratório de Otimização

Cálculo da inversa

$[A]\,[A]^{-1} = [A]^{-1}\,[A] = [I]$

Exemplo 3 × 3: $[A]\,[A]^{-1} = [I] =$ matriz identidade

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da inversa

$$[A]\,[A]^{-1} = [A]^{-1}\,[A] = [I]$$

Exemplo 3×3: $[A]\,[A]^{-1} = [I] =$ matriz identidade

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Fatoração LU de A: $PA = LU$

Cálculo da inversa

$$[A]\,[A]^{-1} = [A]^{-1}\,[A] = [I]$$

Exemplo 3 × 3: $[A]\,[A]^{-1} = [I] =$ matriz identidade

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

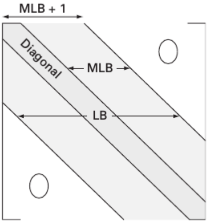
1. Fatoração LU de A: $PA = LU$
2. Resolve $L\,U\,\vec{x_j} = P\,I_j$, $j = 1, 2, 3$, onde

$$\vec{x_j} = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_j = \text{j-ésima coluna de } [I]$$

Matrizes Esparsas:

$$
\begin{bmatrix}
f_1 & g_1 & & & & & \\
e_2 & f_2 & g_2 & & & & \\
 & e_3 & f_3 & g_3 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & e_{n-1} & f_{n-1} & g_{n-1} \\
 & & & & & e_n & f_n
\end{bmatrix}
$$

(a) Tridiagonal.

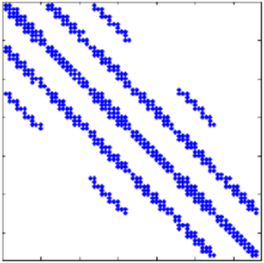


(b) Banda.

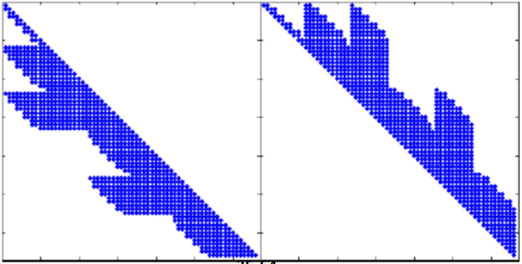
$$
\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\
b_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\
 & b_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\
c_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\
 & c_5 & & b_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\
 & & c_6 & & b_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\
 & & & c_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\
 & & & & c_8 & & b_8 & a_8 & b_8 \\
 & & & & & c_9 & & b_9 & a_9
\end{bmatrix}
$$

(c) Pentadiagonal.

Matrix A: 582 nonzero entries.



$A = LU$: 1950 total nonzero entries.



Sistemas Mal Condicionados

Sistemas mal condicionados são aqueles onde pequenas modificações nos coeficientes ou constantes do sistemas resultam em grandes modificações na solução.

ou

Uma outra interpretação é que uma grande quantidade de respostas pode aproximadamente satisfazer as equações.

Exemplo 1: solução exata $= (4, 3)^T$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.1x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

Exemplo 2: solução exata $= (8, 1)^T$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.05x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

Observação:

- A maioria dos sistemas derivados de problemas de engenharia são naturalmente bem condicionados.
- Resíduo pequeno pode não representar uma boa aproximação para a solução. No Exemplo 2 a solução exata $= (8,1)^T$ e o resíduo para $\hat{x} = (4,3)^T$ é $r = b - A\hat{x} = (0, 0.2)^T$ parece pequeno, mas a solução está muito longe da solução exata.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.05x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

- O determinante também não é um bom indicador do mal condicionamento de um sistema. Exemplo 1 o determinante é -0.2 e no Exemplo 2 é -0.1.

Um bom indicador para o mal condicionamento de um sistema, $Ax = b$, é o número de condição (ou número de condicionamento) da matriz A, definido a partir da norma de A e da norma de A^{-1}:

$$cond(A) = ||A|| ||A^{-1}||$$

Pertubações em A:

Vamos analisar a influência que pertubações dos dados de entrada, $\delta A = \tilde{A} - A$, podem provocar na solução do sistema. Seja $\tilde{A}\bar{x} = b$.

$$\begin{aligned}
& x = A^{-1}b = A^{-1}(\tilde{A}\bar{x}) = A^{-1}(A + \tilde{A} - A)\,\bar{x} \\
& \rightarrow x = \bar{x} + A^{-1}(\tilde{A} - A)\,\bar{x} \\
& \rightarrow \delta x = x - \bar{x} = A^{-1}\delta A\,\bar{x} \\
& \rightarrow ||\delta x|| = ||x - \bar{x}|| \leq ||A|| ||A^{-1}|| \frac{||\delta A||}{||A||} ||\bar{x}|| \\
& \rightarrow \frac{||x - \bar{x}||}{||x||} \leq cond(A) \frac{||\delta A||}{||A||}
\end{aligned}$$

Pertubações em b:
Assimindo que o vetor $\tilde{b}$ contem pertubações δb:

$$\begin{aligned} A^{-1}\tilde{b} = \bar{x} &\quad\Rightarrow\quad ||A^{-1}||||\tilde{b}|| \geq ||\bar{x}|| \\ \delta b = A\delta x &\quad\Rightarrow\quad ||\delta b|| \leq ||A||||\delta x|| \\ A\bar{x} = \tilde{b} &\quad\Rightarrow\quad ||A||||\bar{x}|| \geq ||\tilde{b}|| \\ \delta x = A^{-1}\delta b &\quad\Rightarrow\quad ||\delta x|| \leq ||A^{-1}||||\delta b|| \end{aligned}$$

$$\frac{1}{||A^{-1}||||b||} \leq \frac{1}{||\bar{x}||} \text{ e } \frac{1}{||A||||\bar{x}||} \leq \frac{1}{||\tilde{b}||} \qquad (^1)$$

$$\frac{1}{||A^{-1}||}\left(\frac{||\delta b||}{||\tilde{b}||}\right) \leq ||A||\frac{||\delta x||}{||\bar{x}||} \text{ e } \frac{1}{||A||}\left(\frac{||\delta x||}{||\bar{x}||}\right) \leq ||A^{-1}||\left(\frac{||\delta b||}{||\tilde{b}||}\right) (^2)$$

[1] se a e b são postivos e $a \leq b$, então $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$
[2] se a, b, c e d são positivos e $a \geq b$ e $c \geq d$, então $ab \geq cd$

O número de condição de uma matriz A é definido por:

$$K = cond(A) = ||A^{-1}||||A||$$

Assim podemos concluir que:

$$\frac{1}{K}\left(\frac{||\delta b||}{||\tilde{b}||}\right) \leq \left(\frac{||\delta x||}{||\bar{x}||}\right) \leq K\left(\frac{||\delta b||}{||\tilde{b}||}\right)$$

Lab Otim Laboratório de Otimização

Número de Condicionamento no Octave

Considere o exemplo clássico de matriz mal-condicionada, matriz de Hilbert $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$. A função do Octave abaixo tem por objetivo mostrar como a propagação dos erros de arredondamento prejudicam a confiabilidade nos resultados dos métodos diretos:

```
function [error_x, Keps,Kerror_b, nresiduo] = avaliacond(n);
    H = hilb(n);
    b = H*ones(n);
    x = H\b;
    dx = ones(n)-x;
    db = H*dx;
    nb = norm(db,inf)/norm(b,inf);
    error_x = norm(dx,inf)/norm(x,inf);
    K = cond(H);
    Keps = K*eps;
    Kerror_b = K*nb;
    nresiduo = norm(b-H*x,inf);
endfunction
```

n	$\frac{\|\|\delta x\|\|}{\|\|\bar{x}\|\|}$	$K * eps$	$K\left(\frac{\|\|\delta b\|\|}{\|\|\tilde{b}\|\|}\right)$	$\|\|r\|\|$	K
6	5.4048e-10	3.3198e-09	1.9196e-09	1.3323e-15	1.4951e+07
7	1.7371e-08	1.0555e-07	8.8106e-08	3.1086e-15	4.7537e+08
8	6.5516e-07	3.3879e-06	1.0023e-06	1.7764e-15	1.5258e+10
9	2.3183e-05	1.0950e-04	3.7413e-05	3.5527e-15	4.9315e+11
10	7.9948e-06	7.9948e-06	0.0035581	4.4409e-15	1.6024e+13
11	0.012950	0.11597	0.083193	4.4409e-15	5.2227e+14
12	0.0023275	3.8891	18.346	4.7962e-14	1.7515e+16
13	0.0048332	742.55	4355.9	5.1514e-14	3.3441e+18

Tabela: Erros para a matriz de Hilbert

`eps = 2.2204e-16`

$n = 12$ e 13 mensagem *matrix singular to machine precision*

Métodos Iterativos

1. Idéia dos métodos
2. Método de Gauss-Jacobi
3. Método de Gauss-Seidel
4. Convergência dos métodos
5. Método SOR

Introdução

- Encontra uma solução aproximada com precisão pré-fixada.
- O objetivo é transformar o sistema $Ax = b$ em uma expressão recursiva tal que $x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c$ para uma condição inicial $x^{(0)}$ conhecida.
- Depende de critérios de convergência relacionados a matriz de iteração M.
- A complexidade, por iteração, é em torno de n^2 (número de operações de ponto flutuante).
- Quando a matriz dos coeficientes é esparsa, somente os coeficientes não nulos necessitam ser armazenados.

Ideia Gerais

$$A\,x = b \tag{3}$$

Isolar x, reescrevendo o sistema (3) da seguinte forma:

$$x = M\,x + c \tag{4}$$

onde

$$\begin{aligned} M &= \text{matriz } n \times n \\ c &= \text{vetor } n \times 1 \end{aligned}$$

Defina o processo iterativo com $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c \tag{5}$$

Defina o processo iterativo com $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c \tag{5}$$

Dado $x^{(0)}$, usar (5) para calcular

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= M\,x^{(0)} + c \\ x^{(2)} &= M\,x^{(1)} + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

Defina o processo iterativo com $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c \tag{5}$$

Dado $x^{(0)}$, usar (5) para calcular

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= M\,x^{(0)} + c \\ x^{(2)} &= M\,x^{(1)} + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

até que $e_{rel} = \frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty}{||x^{(k+1)}||_\infty} < \epsilon$ ou $k \geq k_{max}$ (critério de parada)
onde

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{tolerância dada} \\ k_{max} &= \text{número máximo de iterações dado} \\ ||x||_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{(norma do máximo)} \end{aligned}$$

Outro critério de parada: $||r|| = ||b - Ax^{(k+1)}|| < \epsilon$, Seja A um sistema $n \times n$

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

onde estamos assumindo que $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

Seja A um sistema $n \times n$

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

onde estamos assumindo que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)\right]$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)\right]$$

$$\vdots$$

Método de Gauss-Jacobi

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right]
\end{aligned}
$$

Para $k \geq 0$,

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \qquad i = 1, 2, \cdots, n
$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\,x &= (E + D + F)\,x = b \\ \Rightarrow D\,x &= -(E + F)\,x + b \\ \Rightarrow D\,x^{(k+1)} &= -(E + F)\,x^{(k)} + b \end{aligned}$$

Gauss-Jacobi:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= -D^{-1}(E + F)\,x^{(k)} + D^{-1}b \\ &= M\,x^{(k)} + c \end{aligned}$$

Exemplo: Resolver o sistema a seguir pelo método iterativo de Gauss-Jacobi, usando 5 casas decimais,

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(k)} - 0.3x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{-1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(k)} - 1.0x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)}\right) \end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - \left(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)\right]$$

Para $k \geq 0$,

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\,x &= (E + D + F)\,x = b \\ \Rightarrow (E + D)\,x &= -F\,x + b \\ \Rightarrow (E + D)\,x^{(k+1)} &= -F\,x^{(k)} + b \end{aligned}$$

Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= -(E + D)^{-1} F\,x^{(k)} + (E + D)^{-1}\,b \\ &= M\,x^{(k)} + c \end{aligned}$$

Exemplo: Resolver o sistema a seguir pelo método iterativo de Gauss-Seidel, usando 5 casas decimais,

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(k)} - 0.3x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(k+1)} - 1.0x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)}\right) \end{aligned}$$

A convergência da sequência gerada pelo método iterativo estacionário, $x^{k+1} = M\,x^k + c$, é dada pelo Teorema 1, onde são fornecidas condições necessárias e suficientes de convergência.

Teorema 1: O método iterativo $x^{k+1} = M\,x^k + c$ converge com qualquer x^0 se, e somente se, $\rho(M) < 1$, sendo $\rho(M)$ o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração M.

Observações:

- A taxa de convergência será controlada pela magnitude do raio espectral. Quanto menor o raio espectral, mais rápida a convergência.
- A determinação do raio espectral da matriz de iteração $\rho(M)$ pode requerer maior esforço computacional que a própria solução do sistema $Ax = b$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}$

$$M_J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ -1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_J) = 1.12$$

$$M_{GS} = -(E+D)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ 0 & 1.2 & -0.4 \\ 0 & 0.96 & 0.08 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_{GS}) = 0.6928$$

Calculando as sequências dadas pelos métodos de Gauss-Jacobi e Gaus-Seidel podemos confirmar que Gauss-Jacobi diverge e Gauss-Seidel converge [1].

Exemplo: $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}$

$$M_J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_J) = 0.8266$$

$$M_{GS} = -(E+D)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ 0 & -1.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_{GS}) = 1.2$$

Calculando as sequências dadas pelos métodos de Gauss-Jacobi e Gaus-Seidel podemos confirmar que Gauss-Jacobi converge e Gauss-Seidel diverge [1].

Teorema 2 (Critério das Linhas): É condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A seja diagonalmente dominante, ou seja,

$$\alpha_i = (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|)/|a_{ii}| < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Teorema 3 (Critério de Sassenfeld): É condição suficiente para a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A satisfaça

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 < 1 \\ \beta_i &= \frac{\left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right]}{|a_{ii}|} < 1, \qquad i = 2, 3, \cdots, n \end{aligned}$$

Observação: O critério de linhas é apenas suficiente, veja os exemplos a seguir. Observe que nos dois exemplos a matriz A não é diagonalmente dominante.

Exemplo 1: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, sol. exata $= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -3 + 3x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 3 - x_1^{(k)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \text{divergindo}$$

Exemplo 2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, sol. exata $= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(3 + x_1^{(k)}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.6667 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.3333 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6667 \\ 1.4444 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5556 \\ 1.5556 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \text{convergindo}$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$Ax = b \qquad \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned} Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\ & (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \end{aligned}$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$
\begin{aligned}
Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b
\end{aligned}
$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$
\begin{aligned}
Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b
\end{aligned}
$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$(D + \omega E)x^{(k+1)} = [(1 - \omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$
\begin{aligned}
Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \\
& (D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b
\end{aligned}
$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$
\begin{aligned}
& (D + \omega E)x^{(k+1)} = [(1 - \omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\
& Dx^{(k+1)} = \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)Dx^{(k)}
\end{aligned}
$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned} Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D+E+F)x = \omega b \\ & (D-D)x + \omega(D+E+F)x = \omega b \\ & (D+\omega E)x = [(1-\omega)D - \omega F]x + \omega b \end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$\begin{aligned} & (D+\omega E)x^{(k+1)} = [(1-\omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\ & Dx^{(k+1)} = \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1-\omega)Dx^{(k)} \\ & \Rightarrow x^{(k+1)} = \omega D^{-1}(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1-\omega)x^{(k)} \end{aligned}$$

Labotim
Laboratório de Otimização

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned} Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\ & (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \\ & (D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b \end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$\begin{aligned} &(D + \omega E)x^{(k+1)} = [(1 - \omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\ &Dx^{(k+1)} = \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)Dx^{(k)} \\ &\Rightarrow x^{(k+1)} = \omega D^{-1}(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)x^{(k)} \end{aligned}$$

Observação: Para $\omega = 1$, temos o método de Gauss-Seidel:

$$x^{(k+1)} = -(E + D)^{-1} F\, x^{(k)} + (E + D)^{-1}\, b \tag{6}$$

Exemplo: Resolver o sistema a seguir pelo método iterativo SOR, usando 5 casas decimais e $\omega = 1.5$,

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \omega \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(k)} - 0.3x_3^{(k)}\right) + (1-\omega)x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \omega \frac{1}{1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(k+1)} - 1.0x_3^{(k)}\right) + (1-\omega)x_2^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= \omega \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)}\right) + (1-\omega)x_3^{(k)} \end{aligned}$$

Armazenamento de Matrizes Stencil

$$\begin{bmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a & b \\ & & & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - bu_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n - bu_{n+1} \end{bmatrix}$$

A é tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ b & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\ d_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\ & d_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\ e_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\ & e_5 & & d_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\ & & e_6 & & d_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\ & & & e_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\ & & & & e_8 & & d_8 & a_8 & b_8 \\ & & & & & e_9 & & d_9 & a_9 \end{bmatrix} \Rightarrow AA = \begin{bmatrix} & & a_1 & b_1 & c_1 \\ & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ & d_3 & a_3 & 0 & c_3 \\ e_4 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 \\ e_5 & d_5 & a_5 & b_5 & c_5 \\ e_6 & d_6 & a_6 & 0 & c_6 \\ e_7 & 0 & a_7 & b_7 & \\ e_8 & d_8 & a_8 & b_8 & \\ e_9 & d_9 & a_9 & & \end{bmatrix}$$

A é Pentadiagonal

Armazenamento de Matrizes Esparsas - Formato CSR

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

AA	1	1	5	3	4	6	7	8	9	3	6	2	5
JA	1	2	3	1	2	1	3	4	5	3	4	3	5

IA	1	4	6	10	12	14

- n - ordem de A
- nnz - número de coeficientes não nulos
- $2nnz + n + 1$ - número de alocações para armazenar A
- $AA(k) = a_{ij}, JA(k) = j, IA(i) \leq k < IA(i+1)$

Bibliografia Básica

[1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.