Problemas de Valor no Contorno (PVC)

Lucia Catabriga

luciac@inf.ufes.br

October 31, 2019

Introdução

- A solução de Problemas de Valor no Contorno (PVC) pelo método das Diferenças Finitas consiste em:
  - Discretizar o domínio;
  - Aplicar aproximações de diferenças finitas nas derivadas da equação diferencial;
  - Aplicar condições de contorno.

Dadas as funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ contínuas em (a, b), encontrar $u(x)$ tal que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = r(x) \qquad a < x < b \tag{1}$$

com condições de contorno do tipo:

$$u(a) = u_a \text{ ou } \quad \frac{du(a)}{dx} = \sigma_a \text{ ou } \quad \alpha_a\frac{du(a)}{dx} + \beta_a u(a) = \gamma_a \tag{2}$$

$$u(b) = u_b \text{ ou } \quad \frac{du(b)}{dx} = \sigma_b \text{ ou } \quad \alpha_b\frac{du(b)}{dx} + \beta_b u(b) = \gamma_b \tag{3}$$

onde u_a, u_b, σ_a, σ_b, α_a, β_a, α_b, β_b, γ_a e γ_b são constantes conhecidas do problema.

Discretização do Domínio

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{(b-a)}{(n-1)} \\
x_i &= a + (i-1)h, \text{ sendo } a = x_1, b = x_n \text{ e } n \text{ número de incógnitas}
\end{aligned}
$$

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

Objetivo:

obter aproximações $u_i \approx u(x_i) \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n$

Aproximação das derivadas por Diferenças finitas

$$
\begin{aligned}
u'(x_i) &\approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad \theta(h) \text{ (Diferença Adiantada)} \\
u'(x_i) &\approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad \theta(h) \text{ (Diferença Atrasada)} \\
u'(x_i) &\approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad \theta(h^2) \text{ (Diferença Central)} \\
u''(x_i) &\approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \quad \theta(h^2)
\end{aligned}
$$

Aplicando as Diferenças finitas na equação diferencial

$$\left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}\right) + p_i \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right) + q_i u_i = r_i$$

$$b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = r_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

onde:

$$a_i = q_i - (2/h^2) \qquad b_i = (1/h^2) - p_i/(2h) \qquad c_i = (1/h^2) + p_i/(2h)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & b_i & a_i & c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & b_n & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}$$

Matriz Tridiagonal!!!

Configuração - 1D - Tridiagonal

$$\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix}$$

Condições de Contorno - Valor Prescrito

A função u é conhecida em $x_1 = a$ e/ou $x_n = b$, ou seja,
$u_1 = u(x_1) = u_a$ e/ou $u_n = u(x_n) = u_b$

Ação:

$a_1 \to \bar{a}_1 = 1, \quad c_1 \to \bar{c}_1 = 0, \quad r_1 \to \bar{r}_1 = u_a$ e/ou
$a_n \to \bar{a}_n = 1, \quad b_1 \to \bar{b}_1 = 0, \quad r_n \to \bar{r}_n = u_b$

Supondo valor prescrito em $x_1 = a$ e $x_n = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & b_i & a_i & c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ u_b \end{bmatrix}$$

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

A derivada de u é conhecida: $\frac{du(a)}{dx} = \sigma_a$ ou $\frac{du(b)}{dx} = \sigma_b$
A variável u_{i-1} (para $i = 1$) ou a variável u_{i+1} (para $i = n$) deve ser substituida na equação linear $b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = r_i$. Para isso, deve ser usado aproximações de diferenças finitas convenientes na condição de derivada conhecida no contorno:
Para $i = 1 \Rightarrow u_i' \approx \frac{u_1 - u_0}{h} = \sigma_a \Rightarrow u_0 = u_1 - h\sigma_a$
Para $i = n \Rightarrow u_n' \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \sigma_b \Rightarrow u_{n+1} = u_n + h\sigma_b$
Ação:
$a_1 \rightarrow \bar{a}_1 = a_1 + b_1, \quad r_1 \rightarrow \bar{r}_1 = r_1 + b_1 h\sigma_a$ ou
$a_n \rightarrow \bar{a}_n = a_n + c_n, \quad r_n \rightarrow \bar{r}_n = r_n - c_n h\sigma_b$

Supondo valor prescrito em $x_1 = a$ e derivada prescrita em $x_n = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & b_n & a_n + c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n - c_n h\sigma_b \end{bmatrix}$$

Condições de Contorno - Condição mista

Um combinação linear entre u e u' é conhecida: $\alpha_a u'(a) + \beta_a u(a) = \gamma_a$ ou $\alpha_b u'(b) + \beta_b u(b) = \gamma_b$

A variável u_{i-1} (para $i = 1$) ou a variável u_{i+1} (para $i = n$) deve ser substituida na equação linear $b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = r_i$. Para isso, deve ser usado aproximações de diferenças finitas convenientes na condição no contorno:

$i = 1 \Rightarrow \alpha_a \frac{u_1 - u_0}{h} + \beta_a u_1 = \gamma_a \Rightarrow u_0 = (1 + h\beta_a/\alpha_a)u_1 - h\gamma_a/\alpha_a$

$i = n \Rightarrow \alpha_b \frac{u_{n+1} - u_n}{h} + \beta_b u_n = \gamma_b \Rightarrow u_{n+1} = (1 - h\beta_b/\alpha_b)u_n + h\gamma_b/\alpha_b$

Ação:

$a_1 \to \bar{a}_1 = a_1 + b_1(1 + h\beta_a/\alpha_a), \quad r_1 \to \bar{r}_1 = r_1 + b_1 h\gamma_a/\alpha_a$ ou

$a_n \to \bar{a}_n = a_n + c_n(1 - h\beta_b/\alpha_b), \quad r_n \to \bar{r}_n = r_n - c_n h\gamma_b/\alpha_b$

Supondo condição mista em $x_1 = a$ e valor prescrito em $x_n = b$:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & c_1 & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ u_b \end{bmatrix}$$

Exemplo com solução conhecida

Encontre a solução aproximada por diferenças finitas para do PVC:

$$
\begin{aligned}
u'' - \frac{1}{2}u' + u &= x^2 + \frac{1}{2} \text{ para} x \in (0,1) \\
u(0) &= -1 \\
u(1) &= 1 \\
\textit{ou} & \\
u'(0) &= 1 \\
u(1) &= 1 \\
\textit{ou} & \\
u(0) &= -1 \\
-u'(1) + 2u(1) &= -3
\end{aligned}
$$

Considere n = 5, 10 e 50

Exemplo com solução conhecida

Encontre a solução aproximada por diferenças finitas para do PVC:

$$
\begin{aligned}
u'' - \frac{1}{2}u' + u &= x^2 + \frac{1}{2} \text{ para} x \in (0,1) \\
u(0) &= -1 \\
u(1) &= 1 \\
ou & \\
u'(0) &= 1 \\
u(1) &= 1 \\
ou & \\
u(0) &= -1 \\
-u'(1) + 2u(1) &= -3
\end{aligned}
$$

Considere n = 5, 10 e 50

Sabendo que a solução exata é $u(x) = x^2 + x - 1$ avalie o erro cometido em $x = 0.5$

Considere as funções auxiliares:

- `pvc.m`:
  $[x, u] =$
  $pvc(a, b, n, tipo_a, u_a, \sigma_a, \alpha_a, \beta_a, \gamma_a, tipo_b, u_b, \sigma_b, \alpha_b, \beta_b, \gamma_b)$,
  sendo:
  - n número de incógnitas;
  - $tipo_a$ tipo de condição de contorno em $x = a$ (1: valor prescrito, 2: derivada prescrita, 3: condição mista)
  - $tipo_b$ tipo de condição de contorno em $x = b$ (1: valor prescrito, 2: derivada prescrita, 3: condição mista)
- `funcoes.m`:
  $[p, q, r] = funcoes(a, b, n)$
  definições das funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$

funcoes.m

```
function [p,q,r] = funcoes(a,b,n);
h= (b-a)/(n-1);
p = zeros(n,1);
q = zeros(n,1);
r = zeros(n,1);
x = linspace(a,b,n);
for i=1:n do
    p(i) = -1/2;
    q(i) = 1;
    r(i) = x(i)^2 +1/2;
end for
```

pvc.m

```
function [x,u]=pvc(a,b,n,tipo_a,ua,sigma_a,alfa_a,beta_a,gamma_a,
                         tipo_b,ub,sigma_b,alfa_b,beta_b,gamma_b);
h = (b-a)/(n-1);                              ▷ define variaveis principais
x = linspace(a,b,n); x = x'
f = zeros(n,1); u = zeros(n,1); A = zeros(n,n);
[p,q,r]=funcoes(a,b,n);  ▷ considera valores especificos para as funcoes p, q e r
A(1,1) = ...; A(1,2) = ...; f(1) = ...;                ▷ monta sistema Au=f
for i=2:n-1 do
   A(i,i-1) = ...; A(i,i) = ...; A(i,i+1) = ...; f(i) = ...;
end for
A(n,n-1) = ...; A(n,n) = ...; f(n) = ...;
b1 = ...;                          ▷ aplica condicoes de contorno em x=a;
switch tipo_a
case 1 ...; case 2 ...; case 3 ...;
otherwise
printf("Erro na Condicao de contorno");
cn = ...;                          ▷ aplica condicoes de contorno em x=b;
switch tipo_b
case 1 ...; case 2 ...; case 3 ...;
otherwise
printf("Erro na Condicao de contorno");
u = A\f;                                       ▷ Resolve sistema linear
```

Problema de Valor no Contorno - 2D

Supor k, $\beta_x(x,y)$, $\beta_y(x,y)$, $\gamma(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ e $f(x,y)$ conhecidas, encontrar $u(x,y)$ em $\Omega \in \Re^2$ tal que:

$$
\begin{aligned}
-\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\beta_x\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_y\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u &= f \text{ em } \Omega \\
u &= g \text{ em } \Gamma_g \\
-\kappa\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= h \text{ em } \Gamma_h \\
\alpha_q\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}+\beta_q u &= q \text{ em } \Gamma_q
\end{aligned}
$$

$$\partial\Omega = \Gamma_g + \Gamma_h + \Gamma_q$$

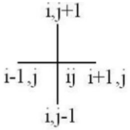
Discretização do Domínio Retangular

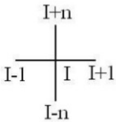
$$\Omega = \{(x,y), a < x < b, c < y < d\}$$

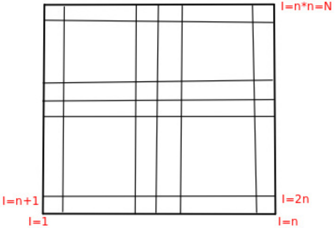
$$\begin{aligned} h_x &= \frac{(b-a)}{(n-1)} \quad x_i = a + (i-1)h_x, \quad i = 1,\ldots,n \\ h_y &= \frac{(d-c)}{(m-1)} \quad y_j = c + (j-1)h_y, \quad j = 1,\ldots,m \end{aligned}$$

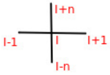
Objetivo:

obter aproximações $u_{ij} \approx u(x_i, y_j) \quad \forall \quad i = 1,\ldots,n$ e $j = 1,\ldots,m$



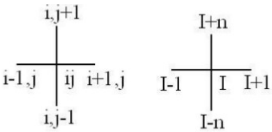






Aproximação das derivadas por Diferenças finitas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} = \frac{u_{I+1} - u_{I-1}}{2h_x}, \quad \theta(h_x^2) \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} = \frac{u_{I+n} - u_{I-n}}{2h_y} \quad \theta(h_y^2) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2} = \frac{u_{I-1} - 2u_I + u_{I+1}}{h_x^2}, \quad \theta(h_x^2) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = \frac{u_{I-n} - 2u_I + u_{I+n}}{h_y^2}, \quad \theta(h_x^2)
\end{aligned}
$$



$$I = 1, 2, \ldots, m * n$$

Aproximação das derivadas por Diferenças finitas

$$
\begin{aligned}
-k\left(\frac{u_{I-1}-2u_I+u_{I+1}}{h_x^2}+\frac{u_{I-n}-2u_I+u_{I+n}}{h_y^2}\right) & + \\
(\beta_x)_I\left(\frac{u_{I+1}-u_{I-1}}{2h_x}\right)+(\beta_y)_I\left(\frac{u_{I+n}-u_{I-n}}{2h_y}\right) & + \\
\gamma_I u_I & = f_I
\end{aligned}
$$

$$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + a_I u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I \qquad \forall I = 1, \dots, m * n$$

$$
\begin{aligned}
a_I &= \gamma_I + 2k\left(1/h_x^2 + 1/h_y^2\right) \\
b_I &= \left(-k/h_x^2\right) - (\beta_x)_I/(2h_x) \\
c_I &= \left(-k/h_x^2\right) + (\beta_x)_I/(2h_x) \\
d_I &= \left(-k/h_y^2\right) - (\beta_y)_I/(2h_y) \\
e_I &= \left(-k/h_y^2\right) + (\beta_y)_I/(2h_y)
\end{aligned}
$$

Sistema Resultante - Matriz Pentadiagonal

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & c_1 & & e_1 & & & & & \\
b_2 & a_2 & c_2 & & e_2 & & & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & & \\
d_{n+1} & & b_{n+1} & a_{n+1} & c_{n+1} & & e_{n+1} & & \\
& \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\
& & d_I & & b_I & a_I & c_I & & e_I \\
& & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & & d_{N-1} & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\
& & & & & d_N & & b_N & a_N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_I \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ u_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \\ \vdots \\ f_I \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N
\end{bmatrix}
$$

Configuração - 2D - Pentadiagonal

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\
b_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\
& b_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\
c_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\
& c_5 & & b_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\
& & c_6 & & b_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\
& & & c_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\
& & & & c_8 & & b_8 & a_8 & b_8 \\
& & & & & c_9 & & b_9 & a_9
\end{bmatrix}
$$

Condições de Contorno - Valor Prescrito

A função u é conhecida em I, ou seja, $u_I = u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j) = g_I$

Ação:

$a_I \rightarrow \bar{a}_I = 1$, $d_I \rightarrow \bar{d}_I = 0$, $b_I \rightarrow \bar{b}_I = 0$, $c_I \rightarrow \bar{c}_I = 0$, $e_I \rightarrow \bar{e}_I = 0$, e $f_I \rightarrow \bar{f}_I = g_I$

Representando a linha I do sistema:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & n-1 & & I-1 & I & I+1 & & I+n & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{array} \right] \end{array} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{n-I} \\ \vdots \\ u_{I-1} \\ u_I \\ u_{I+1} \\ \vdots \\ u_{I+n} \\ \vdots \end{bmatrix} = g_I$$

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

A derivada de u é conhecida em I, ou seja, $-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = h(x_i, y_j) = h_I$
O domínio Ω é retangular, portanto a derivada com relação a normal exterior unitária ($\mathbf{n}$) é definida por:

$$\frac{du}{d\mathbf{n}} = \begin{array}{lll} -\frac{du}{dy} & \text{para} & I = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{du}{dx} & \text{para} & I = n, 2*n, \ldots, m*n \\ \frac{du}{dy} & \text{para} & I = (m-1)*n+1, (m-1)*n+2, \ldots, m*n \\ -\frac{du}{dx} & \text{para} & I = 1, n+1, \ldots, (m-1)*n+1 \end{array}$$

Dependendo da posição I no contorno, uma das variáveis $I-n$, $I-1$, $I+1$, $I+n$ estará fora do domínio, portanto a equação:
$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + a_I u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I$
deverá sofrer as modificações necessárias considerando uma das possibilidades descritas de acima.

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

$I = 1, 2, \ldots, n$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(-\frac{du}{dy}\right)|_I \approx k\left(\frac{u_I - u_{I-n}}{h_y}\right) = h_I \Rightarrow u_{I-n} = u_I - \frac{h_y}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$b_I u_{I-1} + (a_I + d_I)u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I + d_I\frac{h_y}{k}h_I$$

Ação:
$a_I \rightarrow \bar{a}_I = a_I + d_I, \quad d_I \rightarrow \bar{d}_I = 0$ e $f_I \rightarrow \bar{f}_I = f_I + d_I\frac{h_y}{k}h_I$

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

$I = n, 2*n, \ldots, m*n$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(\frac{du}{dx}\right)|_I \approx -k\left(\frac{u_{I+1} - u_I}{h_x}\right) = h_I \Rightarrow u_{I+1} = u_I - \frac{h_x}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + (a_I + c_I)u_I + e_I u_{I+n} = f_I + c_I\frac{h_x}{k}h_I$$

Ação:
$a_I \rightarrow \bar{a}_I = a_I + c_I, \quad c_I \rightarrow \bar{c}_I = 0$ e $f_I \rightarrow \bar{f}_I = f_I + c_I\frac{h_x}{k}h_I$

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

$$I = (m-1)*n+1, (m-1)*n+2, \dots, m*n$$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(\frac{du}{dy}\right)|_I \approx -k\left(\frac{u_{I+n}-u_I}{h_y}\right) = h_I \Rightarrow u_{I+n} = u_I - \frac{h_y}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + (a_I + e_I)u_I + c_I u_{I+1} = f_I + e_I\frac{h_y}{k}h_I$$

Ação:
$a_I \rightarrow \bar{a}_I = a_I + e_I, \quad e_I \rightarrow \bar{e}_I = 0$ e $f_I \rightarrow \bar{f}_I = f_I + e_I\frac{h_y}{k}h_I$

Condições de Contorno - Fluxo Prescrito

$$I = 1, n+1, \ldots, (m-1)*n+1$$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(-\frac{du}{dx}\right)|_I \approx k\left(\frac{u_I - u_{I-1}}{h_x}\right) = h_I \Rightarrow u_{I-1} = u_I - \frac{h_x}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$d_I u_{I-n} + (a_I + b_I)u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I + b_I\frac{h_x}{k}h_I$$

Ação:
$a_I \to \bar{a}_I = a_I + b_I, \quad b_I \to \bar{b}_I = 0$ e $f_I \to \bar{f}_I = f_I + b_I\frac{h_x}{k}h_I$

Condição de Contorno Mista

Um relação linear entre a derivada e a função é conhecida em I, ou seja, $\alpha_q \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_I + \beta_q u_I = q_I$
O domínio Ω é retangular, portanto a derivada com relação a normal exterior unitária ($\mathbf{n}$) é definida por:

$$\frac{du}{d\mathbf{n}} = \begin{cases} -\frac{du}{dy} \text{ para } & I = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{du}{dx} \text{ para } & I = n, 2*n, \ldots, m*n \\ \frac{du}{dy} \text{ para } & I = (m-1)*n+1, (m-1)*n+2, \ldots, m*n \\ -\frac{du}{dx} \text{ para } & I = 1, n+1, \ldots, (m-1)*n+1 \end{cases}$$

Dependendo da posição I no contorno, uma das variáveis $I-n$, $I-1$, $I+1$, $I+n$ estará fora do domínio, portanto a equação:
$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + a_I u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I$
deverá sofrer as modificações necessárias considerando uma das possibilidades descritas acima.

Condição de Contorno Mista para $I = 1, 2, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\alpha_q \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)_I + \beta_q u_I &= q_I \\
\text{Como } \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_I &\approx \frac{u_I - u_{I-n}}{h_y} \\
u_{I-n} &= \left(1 - \frac{h_y \beta_q}{\alpha_q} \right) u_I + \frac{h_y q_I}{\alpha_q}
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação I:

$$
b_I u_{I-1} + \left(a_I + d_I \left(1 - \frac{h_y \beta_q}{\alpha_q} \right) \right) u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I - d_I \frac{h_y q_I}{\alpha_q} q_I
$$

Ação:

$a_I \to \bar{a}_I = a_I + d_I \left(1 - \frac{h_y \beta_q}{\alpha_q} \right)$, $\quad d_I \to \bar{d}_I = 0$ e $f_I \to \bar{f}_I = f_I - d_I \frac{h_y q_I}{\alpha_q} q_I$

Condição de Contorno Mista para $I = n, 2*n, \ldots, m*n$

$$\begin{aligned} \alpha_q \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_I + \beta_q u_I &= q_I \\ \text{Como } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_I &\approx \frac{u_{I+1} - u_I}{h_x} \\ u_{I+1} &= \left(1 - \frac{h_x \beta_q}{\alpha_q}\right) u_I + \frac{h_x q_I}{\alpha_q} \end{aligned}$$

Substituindo na equação I:

$$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + \left(a_I + c_I \left(1 - \frac{h_x \beta_q}{\alpha_q}\right)\right) u_I + e_I u_{I+n} = f_I - c_I \frac{h_x q_I}{\alpha_q}$$

Ação:

$a_I \to \bar{a}_I = a_I + c_I \left(1 - \frac{h_x \beta_q}{\alpha_q}\right)$, $c_I \to \bar{c}_I = 0$ e $f_I \to \bar{f}_I = f_I - c_I \frac{h_x q_I}{\alpha_q}$