Interpolação Polinomial

Lucia Catabriga e Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Otimização e Modelagem Computacional (Labotim)
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

Interpolação Polinomial

Definição:

- Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra $g(x)$ em geral mais simples e que coincida com a função $f(x)$ em um conjunto de pontos. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$.

LabOtim
LABORATÓRIO DE OTIMIZAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAL

Definição:

- Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra $g(x)$ em geral mais simples e que coincida com a função $f(x)$ em um conjunto de pontos. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$.
- A interpolação permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais previamente conhecidos.

Definição:

- Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra $g(x)$ em geral mais simples e que coincida com a função $f(x)$ em um conjunto de pontos. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$.
- A interpolação permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais previamente conhecidos.
- Através da interpolação, pode-se construir uma função que aproximadamente se "encaixe" nestes dados pontuais.

Aplicações:

- Obtenção de valores intermediários em tabelas.

Aplicações:

- Obtenção de valores intermediários em tabelas.
- A função tem uma expressão muito complicada ou de difícil manipulação e queremos avaliar a função em um conjunto de pontos.

Aplicações:

- Obtenção de valores intermediários em tabelas.
- A função tem uma expressão muito complicada ou de difícil manipulação e queremos avaliar a função em um conjunto de pontos.
- A função é desconhecida, tem-se apenas um conjunto de valores e queremos derivar ou integrar a função.

Aplicações:

- Obtenção de valores intermediários em tabelas.
- A função tem uma expressão muito complicada ou de difícil manipulação e queremos avaliar a função em um conjunto de pontos.
- A função é desconhecida, tem-se apenas um conjunto de valores e queremos derivar ou integrar a função.

Formas de interpolação:

- Interpolação utilizando funções polinomiais.
- Interpolação utilizando funções trigonométricas, expansão por séries, etc.

LABORATÓRIO DE OTIMIZAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAL

Estimativa para *ln*(2) usando interpolação linear, quadrática e cúbica.

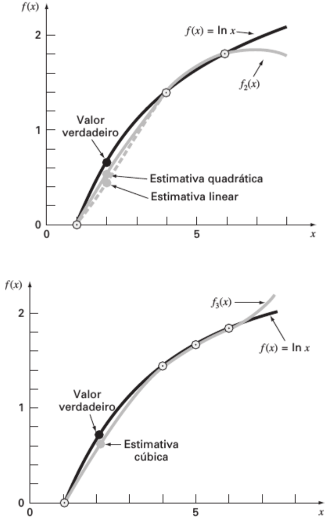
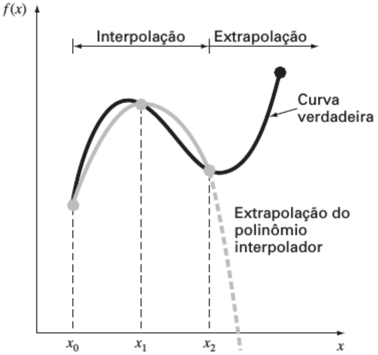


Ilustração da possível divergência de uma previsão extrapolada.



A interpolação polinomial consiste em determinar o único polinômio de grau n, $g(x) = p_n(x)$, que passa pelos $n+1$ pontos dados.

x_k	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y_k = f(x_k)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

A interpolação polinomial consiste em determinar o único polinômio de grau n, $g(x) = p_n(x)$, que passa pelos $n+1$ pontos dados.

x_k	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y_k = f(x_k)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Condições de interpolação:

$$p_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Esse polinômio fornece uma fórmula para calcular valores intermediários, $f(\bar{x})$ para $\bar{x} \in [x_1, x_n]$.

A interpolação polinomial consiste em determinar o único polinômio de grau n, $g(x) = p_n(x)$, que passa pelos $n+1$ pontos dados.

x_k	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y_k = f(x_k)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Condições de interpolação:

$$p_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Esse polinômio fornece uma fórmula para calcular valores intermediários, $f(\bar{x})$ para $\bar{x} \in [x_1, x_n]$.

Teorema: Seja $f(x)$ uma função conhecida em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$. Existe um único polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n, tal que,

$$p_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n$$

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n$$

Usando as condições de interpolação,

$$\begin{aligned}
p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2\, x_0^2 + \cdots + a_n\, x_0^n = f(x_0) \\
p_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2\, x_1^2 + \cdots + a_n\, x_1^n = f(x_1) \\
&\vdots \\
p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2\, x_n^2 + \cdots + a_n\, x_n^n = f(x_n)
\end{aligned}$$

obtemos um sistema linear, envolvendo a matriz de Vandermonde.

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n$$

Usando as condições de interpolação,

$$\begin{aligned}
p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2\, x_0^2 + \cdots + a_n\, x_0^n = f(x_0) \\
p_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2\, x_1^2 + \cdots + a_n\, x_1^n = f(x_1) \\
&\vdots \\
p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2\, x_n^2 + \cdots + a_n\, x_n^n = f(x_n)
\end{aligned}$$

obtemos um sistema linear, envolvendo a matriz de Vandermonde. Se $x_0, x_1, \cdots, x_n$ são distintos, o sistema tem solução única ($\det \neq 0$).

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Embora exista um e só um polinômio de grau n que passa por $n+1$ pontos, há diversas fórmulas matemáticas nas quais esse polinômio pode ser expresso:

1. Resolução do sistema linear

Embora exista um e só um polinômio de grau n que passa por $n + 1$ pontos, há diversas fórmulas matemáticas nas quais esse polinômio pode ser expresso:

1. Resolução do sistema linear
2. Forma de Lagrange, Forma de Newton

Embora exista um e só um polinômio de grau n que passa por $n+1$ pontos, há diversas fórmulas matemáticas nas quais esse polinômio pode ser expresso:

1. Resolução do sistema linear
2. Forma de Lagrange, Forma de Newton
3. Splines, polinômios de Chebyshev, etc

Embora exista um e só um polinômio de grau n que passa por $n+1$ pontos, há diversas fórmulas matemáticas nas quais esse polinômio pode ser expresso:

1. Resolução do sistema linear
2. Forma de Lagrange, Forma de Newton
3. Splines, polinômios de Chebyshev, etc

A resolução do sistema linear pode ser computacionalmente ineficiente e depende das condições de estabilidade da matriz de Vandermonde.

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	3	1	-1

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	3	1	-1

Usando as condições de interpolação em $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, temos

$$\begin{aligned}
p_2(-2) &= a_0 + a_1(-2) + a_2(-2)^2 = 3 \;\Rightarrow\; a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 3 \\
p_2(0) &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 1 \;\Rightarrow\; a_0 = 1 \\
p_2(1) &= a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = -1 \;\Rightarrow\; a_0 + a_1 + a_2 = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & a_0 = 1,\; a_1 = -1.6667,\; a_2 = -0.3333 \\
& p_2(x) = 1 - 1.6667x - 0.3333x^2 \\
& p_2(-1) = 2.333
\end{aligned}$$

LABORATÓRIO DE OTIMIZAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAL

Dada a tabela de pontos

x_k	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y_k = f(x_k)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Sejam polinômios de grau n, $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ tais que:

$$\begin{aligned} P_k(x_k) &\neq 0 \text{ e} \\ P_k(x_j) &= 0 \;\; \forall k \neq j \end{aligned}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) \\ P_1(x) &= (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) \\ P_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n) \\ &\vdots \\ P_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)$$

o polinômio de Lagrange pode ser representado por

$$L_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k P_k(x)$$

o polinômio de Lagrange pode ser representado por

$$L_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k P_k(x)$$

onde

$$L_n(x_k) = y_k = c_k P_k(x_k) \Rightarrow c_k = \frac{y_k}{P_k(x_k)}$$

o polinômio de Lagrange pode ser representado por

$$L_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k P_k(x)$$

onde

$$L_n(x_k) = y_k = c_k P_k(x_k) \Rightarrow c_k = \frac{y_k}{P_k(x_k)}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{P_k(x_k)} P_k(x)$$

o polinômio de Lagrange pode ser representado por

$$L_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k P_k(x)$$

onde

$$L_n(x_k) = y_k = c_k P_k(x_k) \Rightarrow c_k = \frac{y_k}{P_k(x_k)}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{P_k(x_k)} P_k(x)$$

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} = y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Encontre o polinômio de Lagrange de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	3	1	-1

Encontre o polinômio de Lagrange de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	3	1	-1

$$L_2(x) = 3\frac{P_0(x)}{P_0(x_0)} + 1\frac{P_1(x)}{P_1(x_1)} - 1\frac{P_2(x)}{P_2(x_2)}$$

onde

$$\frac{P_0(x)}{P_0(-2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)}, \quad \frac{P_1(x)}{P_1(0)} = \frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)}, \quad \frac{P_2(x)}{P_2(1)} = \frac{(x+2)(x-0)}{(1+2)(1-0)}$$

$$\Rightarrow L_2(-1) = 3\frac{P_0(-1)}{P_0(-2)} + \frac{P_1(-1)}{P_1(0)} - \frac{P_2(-1)}{P_2(1)} = 3(\frac{1}{3}) + 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2.333$$

Encontre o polinômio de Lagrange de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	3	1	-1

$$L_2(x) = 3\frac{P_0(x)}{P_0(x_0)} + 1\frac{P_1(x)}{P_1(x_1)} - 1\frac{P_2(x)}{P_2(x_2)}$$

onde

$$\frac{P_0(x)}{P_0(-2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)},\ \frac{P_1(x)}{P_1(0)} = \frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)},\ \frac{P_2(x)}{P_2(1)} = \frac{(x+2)(x-0)}{(1+2)(1-0)}$$

$$\Rightarrow L_2(-1) = 3\frac{P_0(-1)}{P_0(-2)} + \frac{P_1(-1)}{P_1(0)} - \frac{P_2(-1)}{P_2(1)} = 3(\frac{1}{3}) + 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2.333$$

Observação: o polinômio interpolador é único

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 0.5x(x-1) - 0.5(x+2)(x-1) - 0.3333(x+2)x \\ &= 1 - 2.6667x - 0.3333x^2 \end{aligned}$$

Dispositivo Prático:

$$\begin{aligned}
L_n(x^*) &= y_0 \frac{P_0(x^*)}{P_0(x_0)} + y_1 \frac{P_1(x^*)}{P_1(x_1)} + \cdots + y_n \frac{P_n(x^*)}{P_n(x_n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x^* - x_j}{x_k - x_j} \frac{(x^* - x_k)}{(x^* - x_k)} \\
&= G_d \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{G_k}
\end{aligned}$$

$$G = \begin{bmatrix} (x^* - x_0) & (x_0 - x_1) & \cdots & (x_0 - x_n) \\ (x_1 - x_0) & (x^* - x_1) & \cdots & (x_1 - x_n) \\ \vdots & & & \\ (x_n - x_0) & (x_n - x_1) & \cdots & (x^* - x_n) \end{bmatrix}_{n+1,n+1}$$

onde

G_d = produto da diagonal

G_k = produto dos elementos da $(k+1)$-ésima linha

Pseudocódigo do método de Lagrange [2]: $(2n^2 + 3n + 1)$ adições/subtrações, $(n^2 + n)$ multiplicações e $(n^2 + n)$ divisões para avaliar a interpolação em um ponto. (Forma Padrão)

```
Algoritmo Lagrange_Expressão_1
{ Objetivo: Interpolar usando polinômio de Lagrange }
parâmetros de entrada m, x, y, z
  { número de pontos, abscissas }
  { ordenadas e valor a interpolar }
parâmetro de saída r  { valor interpolado }
  r ← 0
  para i ← 1 até m faça
    p ← y(i)
    para j ← 1 até m faça
      se i ≠ j então
        p ← p * ((z − x(j))/(x(i) − x(j)))
      fimse
    fimpara
    r ← r + p
  fimpara
fimalgoritmo
```

Pseudocódigo do método de Lagrange [1]: $(2n^2 + 3n + 1)$ adições/subtrações, $(2n^2 + 3n + 1)$ multiplicações e $(n + 1)$ divisões para avaliar a interpolação em um ponto. (Forma otimizada)

```
Algoritmo Polinômio_Lagrange
{ Objetivo: Interpolar valor em tabela usando polinômio de Lagrange }
parâmetros de entrada m, x, y, z
  { número de pontos, abscissas, ordenadas e valor a interpolar }
parâmetro de saída r { valor interpolado }
  r ← 0
  para i ← 1 até m faça
    c ← 1; d ← 1
    para j ← 1 até m faça
      se i ≠ j então
        c ← c ∗ (z − x(j)); d ← d ∗ (x(i) − x(j))
      fimse
    fimpara
    r ← r + y(i) ∗ c/d
  fimpara
fimalgoritmo
```

Dada a tabela de pontos

x_k	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$y_k = f(x_k)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

o polinômio de Newton pode ser representado por

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

onde

$$d_k = f[x_k, x_{k-1}, \cdots, x_0] \quad = \quad \text{diferenças divididas de ordem } k \text{ entre os pontos } (x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_k, y_k)$$

Dada a tabela de pontos

x_k	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$y_k = f(x_k)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

o polinômio de Newton pode ser representado por

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + d_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

onde

$$d_k = f[x_k, x_{k-1}, \cdots, x_0] \quad = \quad \text{diferenças divididas de ordem } k \text{ entre os pontos } (x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_k, y_k)$$

O polinômio de Newton tem a característica de recorrência, isto é, o polinômio de grau n pode ser calculado usando o polinômio interpolador de grau $n-1$ e um novo ponto. Ou seja,

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + d_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$d_0 = f[x_0] = f(x_0) \qquad \text{Ordem 0}$$

$$d_0 = f[x_0] = f(x_0) \qquad \text{Ordem 0}$$

$$d_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \text{Ordem 1}$$

LABORATÓRIO DE OTIMIZAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAL

$$
\begin{aligned}
d_0 &= f[x_0] = f(x_0) && \text{Ordem 0} \\
d_1 &= f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} && \text{Ordem 1} \\
d_2 &= f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} && \text{Ordem 2} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_0 &= f[x_0] = f(x_0) && \text{Ordem 0}\\
d_1 &= f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} && \text{Ordem 1}\\
d_2 &= f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} && \text{Ordem 2}\\
&\vdots\\
d_k &= f[x_k, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f[x_k, \cdots, x_1] - f[x_{k-1}, \cdots, x_0]}{x_k - x_0} && \text{Ordem k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_0 &= f[x_0] = f(x_0) && \text{Ordem 0}\\
d_1 &= f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} && \text{Ordem 1}\\
d_2 &= f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} && \text{Ordem 2}\\
&\vdots\\
d_k &= f[x_k, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f[x_k, \cdots, x_1] - f[x_{k-1}, \cdots, x_0]}{x_k - x_0} && \text{Ordem k}
\end{aligned}
$$

Tabela das diferenças divididas [2]: descrição gráfica da natureza recursiva

i	x_i	$f(x_i)$	Primeira	Segunda	Terceira
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

A forma de Newton para o polinômio interpolador:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Seja D o domínio de $p_n(x) \Rightarrow (x_0, x_n) \subset D$

A forma de Newton para o polinômio interpolador:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Seja D o domínio de $p_n(x) \Rightarrow (x_0, x_n) \subset D$

$p_0(x)$ é o polinômio de grau 0 que interpola $f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$:

$p_0(x) = d_0 = f(x_0)$

$\forall x \in D$ e $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} f[x_0, x] &= \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \\ (x - x_0) f[x_0, x] &= f(x) - f(x_0) \Rightarrow \end{aligned}$$

A forma de Newton para o polinômio interpolador:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Seja D o domínio de $p_n(x) \Rightarrow (x_0, x_n) \subset D$

$p_0(x)$ é o polinômio de grau 0 que interpola $f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$:

$p_0(x) = d_0 = f(x_0)$

$\forall x \in D$ e $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} f[x_0, x] &= \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \\ (x - x_0)f[x_0, x] &= f(x) - f(x_0) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p_0(x)} + \underbrace{(x - x_0)f[x_0, x]}_{E_0(x)}$$

$p_1(x)$ é o polinômio de grau 1 que interpola $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$:

$p_1(x)$ é o polinômio de grau 1 que interpola $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$:

$p_1(x) = d_0 + d_1(x - x_0)$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x] &= f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} = \\ &= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f[x_1, x_0]}{(x - x_1)(x - x_0)} \end{aligned}$$

$p_1(x)$ é o polinômio de grau 1 que interpola $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$:

$p_1(x) = d_0 + d_1(x - x_0)$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x] &= f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} = \\ &= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0]}{(x - x_1)(x - x_0)} \end{aligned}$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]}_{E_1(x)}$$

$p_2(x)$ é o polinômio de grau 2 que interpola $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$:

$p_2(x)$ é o polinômio de grau 2 que interpola $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$:

$$p_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2, x] &= f[x_2, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_1, x_0, x] - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} \\
&= \frac{\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} - f[x_1, x_0]}{x - x_1} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} = \\
&= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0] - (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]}{(x - x_1)(x - x_0)(x - x_2)}
\end{aligned}$$

LABORATÓRIO DE OTIMIZAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAL

$p_2(x)$ é o polinômio de grau 2 que interpola $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$:

$p_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1)$

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2, x] &= f[x_2, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_1, x_0, x] - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} \\
&= \frac{\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} - f[x_1,x_0]}{x-x_1} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} = \\
&= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0] - (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]}{(x - x_1)(x - x_0)(x - x_2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)}_{p_2(x)} \\
&+ \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x]}_{E_2(x)}
\end{aligned}
$$

$p_n(x)$ é o polinômio de grau n que interpola $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$:

$p_n(x)$ é o polinômio de grau n que interpola $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + d_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

$p_n(x)$ é o polinômio de grau n que interpola $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + d_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= p_n(x) + E_n(x) \\
p_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&+ \ldots + f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \\
E_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x]
\end{aligned}$$

Encontre o polinômio de Newton de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	3	1	-1

Encontre o polinômio de Newton de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	3	1	-1

$$p_2(x) = d_0 + d_1(x+2) + d_2(x+2)(x-0)$$

LABORATÓRIO DE OTIMIZAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAL

Encontre o polinômio de Newton de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	3	1	-1

$$p_2(x) = d_0 + d_1(x+2) + d_2(x+2)(x-0)$$

onde

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-2	3	-1	-0.333
0	1	-2	
1	-1		

Encontre o polinômio de Newton de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	3	1	-1

$$p_2(x) = d_0 + d_1(x+2) + d_2(x+2)(x-0)$$

onde

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-2	3	-1	-0.333
0	1	-2	
1	-1		

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2(x) &= 3 - (x+2) - 0.333(x+2)x \\ p_2(-1) &= 3 - 1 + 0.333 = 2.333 \end{aligned}$$

Encontre o polinômio de Newton de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	3	1	-1

$$p_2(x) = d_0 + d_1(x+2) + d_2(x+2)(x-0)$$

onde

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-2	3	-1	-0.333
0	1	-2	
1	-1		

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2(x) &= 3-(x+2)-0.333(x+2)x \\ p_2(-1) &= 3-1+0.333 = 2.333 \end{aligned}$$

Observação: $p_2(x) = 3-(x+2)-0.333(x+2)x = 1-2.667x-0.333x^2$

Teorema: Seja $[a, b]$ um intervalo que contém os pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ e $f(x)$ uma função com $(n+1)$ derivadas contínuas em $[a, b]$. Pode-se mostrar que o erro do polinômio interpolador no ponto $x \in [a, b]$ é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n), \quad \xi \in [a, b]$$

Teorema: Seja $[a, b]$ um intervalo que contém os pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ e $f(x)$ uma função com $(n+1)$ derivadas contínuas em $[a, b]$. Pode-se mostrar que o erro do polinômio interpolador no ponto $x \in [a, b]$ é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n), \quad \xi \in [a, b]$$

Limitante para o erro:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!}|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|$$

onde $M_n = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$

Teorema: Seja $[a, b]$ um intervalo que contém os pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ e $f(x)$ uma função com $(n+1)$ derivadas contínuas em $[a, b]$. Pode-se mostrar que $\exists\ x \in (a, b)$ e $\exists\ \xi_x \in (a, b)$ tal que

$$f[x, x_k, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Teorema: Seja $[a, b]$ um intervalo que contém os pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ e $f(x)$ uma função com $(n+1)$ derivadas contínuas em $[a, b]$. Pode-se mostrar que $\exists\, x \in (a, b)$ e $\exists\, \xi_x \in (a, b)$ tal que

$$f[x, x_k, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Corolário:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \approx d_{n+1}|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|$$

onde $d_{n+1} = \max \left|\, \text{diferenças divididas de ordem } (n+1) \,\right|$

Escolha do grau do polinômio: Se na vizinhaça do ponto de interesse as diferenças divididas de ordem k são praticamente constantes

Escolha do grau do polinômio: Se na vizinhaça do ponto de interesse as diferenças divididas de ordem k são praticamente constantes

$\Rightarrow$ as diferenças divididas de ordem $k+1$ variam em torno de zero (são bem pequenas)

Escolha do grau do polinômio: Se na vizinhaça do ponto de interesse as diferenças divididas de ordem k são praticamente constantes

$\Rightarrow$ as diferenças divididas de ordem $k+1$ variam em torno de zero (são bem pequenas)

$\Rightarrow$ podemos escolher grau k para o polinômio interpolador devido à sua propriedade de recorrência:

$$p_{k+1}(x) = p_k(x) + d_{k+1}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_k)$$

Escolha do grau do polinômio: Se na vizinhaça do ponto de interesse as diferenças divididas de ordem k são praticamente constantes

$\Rightarrow$ as diferenças divididas de ordem $k+1$ variam em torno de zero (são bem pequenas)

$\Rightarrow$ podemos escolher grau k para o polinômio interpolador devido à sua propriedade de recorrência:

$$p_{k+1}(x) = p_k(x) + d_{k+1}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$$

Como $d_{k+1} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad p_{k+1}(x) \approx p_k(x)$

Exemplo: calcule uma aproximação para $ln(4.5)$ usando um polinômio interpolador de grau 2 na forma de Newton e estime o erro cometido, dada a tabela de pontos abaixo.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x) = ln(x)$	0	0.6931	1.0986	1.3863	1.6094	1.7918

Exemplo: interpolar um polinômio de grau 2 na forma de Newton, $f(x) = x^2$, dada a tabela abaixo. Observe que vamos recuperar o polinômio original.

x_k	-1	0	1	3	4
$f(x_k)$	1	0	1	9	16

Exemplo: interpolar um polinômio de grau 2 na forma de Newton, $f(x) = x^2$, dada a tabela abaixo. Observe que vamos recuperar o polinômio original.

x_k	-1	0	1	3	4
$f(x_k)$	1	0	1	9	16

Tabela de diferenças divididas:

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
-1	1	-1	1	0
0	0	1	1	0
1	1	4	1	
3	9	7		
4	16			

Exemplo: interpolar um polinômio de grau 2 na forma de Newton, $f(x) = x^2$, dada a tabela abaixo. Observe que vamos recuperar o polinômio original.

x_k	-1	0	1	3	4
$f(x_k)$	1	0	1	9	16

Tabela de diferenças divididas:

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
-1	1	-1	1	0
0	0	1	1	0
1	1	4	1	
3	9	7		
4	16			

$$p_2(x) = 1 - 1(x+1) + 1(x+1)x = 1 - x - 1 + x^2 + x = x^2$$

Pseudocódigo do método de Newton [2]:

```
SUBROUTINE NewtInt (x, y, n, xi, yint, ea)
  LOCAL fdd_{n,n}
  DOFOR i = 0, n
    fdd_{i,0} = y_i
  END DO
  DOFOR j = 1, n
    DOFOR i = 0, n − j
      fdd_{i,j} = (fdd_{i+1,j−1} − fdd_{i,j−1})/(x_{i+j} − x_i)
    END DO
  END DO
  xterm = 1
  yint_0 = fdd_{0,0}
  DOFOR order = 1, n
    xterm = xterm * (xi − x_{order−1})
    yint2 = yint_{order−1} + fdd_{0,order} * xterm
    Ea_{order−1} = yint2 − yint_{order−1}
    yint_{order} = yint2
  END order
END NewtInt
```

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$p_3(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= d_0 + (x - x_0)\left[d_1 + (x - x_1)\left[d_2 + (x - x_2)d_3\right]\right]
\end{aligned}
$$

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= d_0 + (x - x_0)\left[d_1 + (x - x_1)\left[d_2 + (x - x_2)d_3\right]\right]
\end{aligned}
$$

$$
c_3 = d_3
$$

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$\begin{aligned} p_3(x) &= d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= d_0 + (x - x_0)\left[d_1 + (x - x_1)\left[d_2 + (x - x_2)d_3\right]\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= d_3 \\ c_2 &= d_2 + (x - x_2)c_3 \end{aligned}$$

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$\begin{aligned} p_3(x) &= d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= d_0 + (x - x_0)\left[d_1 + (x - x_1)\left[d_2 + (x - x_2)d_3\right]\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= d_3 \\ c_2 &= d_2 + (x - x_2)c_3 \\ c_1 &= d_1 + (x - x_1)c_2 \end{aligned}$$

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$\begin{aligned} p_3(x) &= d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + d_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= d_0 + (x-x_0)\left[d_1 + (x-x_1)\left[d_2 + (x-x_2)d_3\right]\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= d_3 \\ c_2 &= d_2 + (x-x_2)c_3 \\ c_1 &= d_1 + (x-x_1)c_2 \\ c_0 &= d_0 + (x-x_0)c_1 \end{aligned}$$

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$\begin{aligned} p_3(x) &= d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + d_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= d_0 + (x-x_0)\left[d_1 + (x-x_1)\left[d_2 + (x-x_2)d_3\right]\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= d_3 \\ c_2 &= d_2 + (x-x_2)c_3 \\ c_1 &= d_1 + (x-x_1)c_2 \\ c_0 &= d_0 + (x-x_0)c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_3 &= d_3 \\ \Rightarrow c_i &= d_i + (x-x_i)c_{i+1}, \quad i = 2,1,0 \end{aligned}$$

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$\begin{aligned} p_3(x) &= d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= d_0 + (x - x_0)\left[d_1 + (x - x_1)\left[d_2 + (x - x_2)d_3\right]\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= d_3 \\ c_2 &= d_2 + (x - x_2)c_3 \\ c_1 &= d_1 + (x - x_1)c_2 \\ c_0 &= d_0 + (x - x_0)c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_3 &= d_3 \\ \Rightarrow c_i &= d_i + (x - x_i)c_{i+1}, \quad i = 2, 1, 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_0 = p_3(x)$$

Fenômeno de Runge: Sejam $(n+1)$ pontos distintos igualmente espaçados, $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Mostra-se que $G(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$ assume seu módulo máximo em um dos extremos (x_0, x_1) ou (x_{n-1}, x_n).

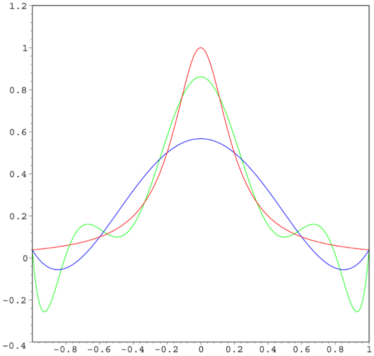


Figura: A função vermelha é a função de Runge, a azul é um polinômio de grau 5 e o verde representa um polinômio de grau 9 [4].

Problema: Dado $\bar{y} \in (f(x_0), f(x_n))$, obter $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{y}$

x_k	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y_k = f(x_k)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Formas para resolver o problema:

1. Determinar o polinômio $p_n(x)$ que interpola em $x_0, x_1, \cdots, x_n$ e, em seguida, encontrar $\bar{x}$ tal que $p_n(\bar{x}) = \bar{y}$ (encontrar a raiz do polinômio).
2. Se $f(x)$ for inversível em um intervalo contendo $\bar{y}$, então é possível inverter a tabela neste intervalo e fazer a interpolação de $x = g(y)$, onde $g(y) = f^{-1}(x)$.

Exemplo: Dada a tabela abaixo, encontrar x tal que $f(x) = 1.3$ usando um polinômio interpolador de grau 2 na forma de Newton.

x_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x_k) = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918

Bibliografia Básica

[1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.

[4] http://math.stackexchange.com/questions/200924/why-is-lagrange-interpolation-num erically-unstable

[5] CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?cur

Sugestão de Exercícios

Na referência [1] 3.6; 3.7; 3.8; 3.9

Na referência [1] 3.11; 3.12; 3.15

Na referência [1] 3.26; 3.27; 3.28; 3.29; 3.30

Na referência [1] 3.46; 3.47

Na referência [1] 3.48 (a) (utilizar o código em octave desenvolvido em aula)